Lycée militaire de Saint-Cyr **Devoir maison de mathématiques** **2^de^**

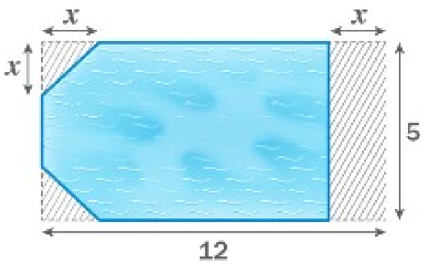
Thème : (In)équations-fonctions-vecteurs

A me rendre en pdf (en scannant votre copie) pour le lundi 23/03/20 via la messagerie Pronote ou via mon adresse académique xavier.grand-jacquot@ac-versailles.fr

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation de la copie. Tous les résultats devront être soulignés.

Exercice 1 *En attendant l'été…*

Pierre construit une piscine dans son jardin. La surface de cette piscine est obtenue en retirant d'un rectangle de 12 m sur 5 m les parties hachurées, où $0 < x < 2{,}5$.

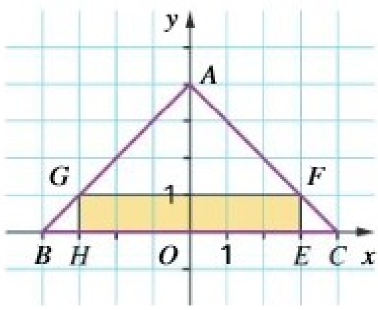


Pierre ne dispose des matériaux pour construire une piscine de surface 50,25 m^2.

1. Montrer que l'aire $A(x)$, en m^2, de la piscine vaut $A(x) = -x^2 - 5x + 60$ pour tout nombre réel x dans l'intervalle $]0\,;2{,}5[$.
2. Démontrer que $A(x) = -\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{265}{4}$ pour tout nombre réel x dans l'intervalle $]0\,;2{,}5[$.
3. a) Montrer que l'équation $A(x) = 50{,}25$ équivaut à $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - 16 = 0$.
   b) Résoudre cette équation dans $]0\,;2{,}5[$.
4. En déduire les dimensions de la piscine pour que sa surface soit égale à 50,25 m^2.

Exercice 2

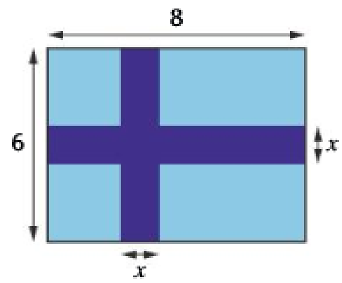
Dans le repère ci-dessous, on a placé les points suivants : $A(0\,;4), B(-4\,;0), C(4\,;0)$.
Le rectangle EFGH est inscrit dans le triangle ABC.
On note x l'abscisse de E. Remarquez que $OE = x$.



Déterminer toutes les positions possibles de E pour lesquelles l'aire du rectangle est égale à 3/8^e de l'aire du triangle

Exercice 3 *L'appel aux couleurs…*

Soit un drapeau de dimensions $6m \times 8m$ sur lequel on souhaite tracer une croix comme sur le dessin ci-contre.
La largeur x de la croix doit au moins être égale à 0,5 m.



Quelle largeur doit-on donner à la croix pour que son aire soit inférieure ou égale à l'aire restante du drapeau ?
Indication : On pourra développer $(x-2)(x-12)$.

Exercice 4

Soit la fonction f suivante où $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1. Calculer, lorsque cela est possible, les images des nombres suivants par la fonction f : $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$ et -2.
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f que l'on notera D_f.
3. Déterminer les antécédents éventuels de 0 et 1 par la fonction f.
4. Résoudre sur D_f l'équation $f(x) = x$.

Exercice 5
Soit ABC un triangle non aplati.

1. Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$.
   Que constatez-vous sur votre figure ?
2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Puis, conclure par rapport à ce que vous avez établi à la question précédente.

Exercice 6
Dans le repère orthonormé $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points suivants $M(-2\,;\,-2), N(3\,;1), P(0\,;6)$ et $Q(-5\,;3)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{QP}$, en déduire la nature du quadrilatère MNPQ, *justifier.*
2. Calculer la norme des vecteurs $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{MP}$. Déterminer la nature du quadrilatère MNPQ, *justifier*.
3. a) Le repère $(M\,;\,\overrightarrow{MN}\,,\overrightarrow{MP})$ est-il orthonormé ? *Justifier*
   b) Le repère $(M\,;\,\overrightarrow{MN}\,,\overrightarrow{MQ})$ est-il orthonormé ? *Justifier*

Le barème est sur la page suivante avec une question BONUS !

BONUS !

1) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, x + \sqrt{1+x^2} \geq 0$. *Pensez à bien séparer les cas : x positif et x négatif.*

2) ABC est un triangle et x un nombre réel différent de -1.
Les points R et S sont définis par :
$\overrightarrow{AR} = x\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{x+1}\overrightarrow{BC}$
Prouver que les points R, A et S sont alignés.

Barème probable /30 : **<u>Ex 1</u>** : 6 ; **<u>Ex 2</u>** : 4 ; **<u>Ex 3</u>** : 4 ; **<u>Ex 4</u>** : 6 ; **<u>Ex 5</u> :** 4 ; **<u>Ex 6</u> :** 6
Bonus ! : 2