Chapitre 7	LOIS DE PROBABILITÉ A DENSITÉ	TES

« Tu crois au Dieu qui joue aux dés, et moi à la seule valeur des lois. »

A. Einstein

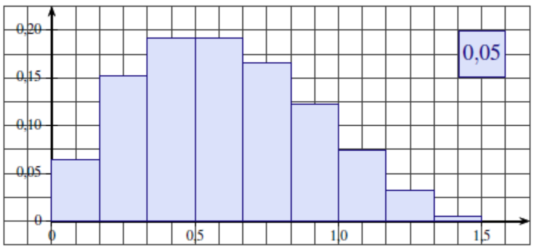
Dans tout ce chapitre, on considère une expérience aléatoire et un univers associé Ω, muni d'une probabilité.

I Introduction

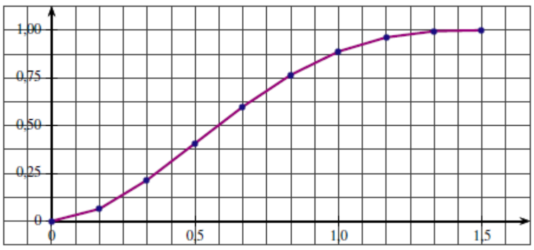
Jusqu'à présent, les variables aléatoires rencontrées ne prenaient qu'un nombre fini de valeurs. Leurs lois de probabilité, dites *discrètes*, étaient donc définies par la donnée des probabilités de chacune des valeurs prises.
Dans différents domaines on est amené à étudier des variables aléatoires pouvant prendre théoriquement toute valeur réelle d'un intervalle I de ℝ. Ces variables aléatoires sont dites continues.
C'est le cas, par exemple, de la durée du temps d'attente aux consultations d'un hôpital fictif.

Temps d'attente (en minutes)	[0; 10[	[10; 20[	[20; 30[	[30; 40[	[40; 50[	[50; 60[	[60; 70[	[70; 80[	[80; 90]
Fréquences	0,064	0,152	0,192	0,192	0,166	0,123	0,074	0,032	0,005

La série statistique à caractère quantitatif continu est représentée par un histogramme constitué d'une juxtaposition de rectangles dont les aires sont proportionnelles aux fréquences.



Histogramme



Polygone des fréquences cumulées

II Densité de probabilité et loi de probabilité

2.1 Variable aléatoire continue

Définition Une variable aléatoire continue X est une fonction qui à chaque issue de Ω associe un nombre réel de l'intervalle I de ℝ.

Exemple La variable aléatoire égale à la durée de bon fonctionnement d'un équipement produit en grande série est une variable aléatoire continue.

2.2 Fonction de densité (ou densité de probabilité)

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a\,;b]$. On dit que f est une fonction de densité sur $[a\,;b]$ ou encore une densité de probabilité sur $[a\,;b]$ si la fonction f vérifie les trois points suivants :
(i) f est positive sur $[a\,;b]$
(ii) f est continue sur $[a\,;b]$
(iii) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$ (ie l'aire sous la courbe de f est égale à une u.a). De manière générale pour un intervalle I, on note $\int_I\ f(x)dx = 1$.

Exemple On considère la fonction f définie sur $[1; 2]$ par $f(x) = \frac{2}{x^2}$. Montrons que f est une fonction de densité sur $[1; 2]$.

(i) Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$ donc f est bien une fonction positive.

(ii) Grâce aux fonctions usuelles on peut dire que f est continue sur $[1;2]$.

(iii) Calculons $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$. Pour ce calcul nous avons besoin d'une primitive de f. Grâce aux primitives usuelles on peut dire que la fonction F définie sur $[1;2]$ par $F(x) = -\dfrac{2}{x}$ est une primitive de f. On a donc :

$$\int_1^2 f(x)\,dx = F(2) - F(1) = -1 - (-2) = -1 + 2 = 1$$

En conclusion f est bien une fonction de densité sur $[1;2]$.

2.3 Loi de probabilité

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que la variable aléatoire X suit la loi de probabilité de densité f sur l'intervalle sur I lorsque, que pour tout intervalle $[a; b]$ inclus dans I, on a :

$$P(X \in [a;b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Remarque Cette probabilité est égale à l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, en u.a.

Propriétés f une fonction définie sur un intervalle I. Soient la variable aléatoire X suivant la loi de probabilité de densité f sur l'intervalle sur I et a, b deux réels appartenant à I.
(i) $P(X = a) = 0$
(ii) $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$
(iii) $P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$ et $P(X \leq a) = P(X < a)$

Démonstration
$P(X = c) = 0$, les inégalités larges ou strictes n'ont plus d'importance

Exemple Reprenons la fonction de densité de l'exemple précédent. Soit X une variable aléatoire dont une fonction de densité est la fonction f.

On rappelle que f est définie sur $[1;2]$ par $f(x) = \frac{2}{x^2}$. Calculons $P(1,1 \leqslant X \leqslant 1,4)$ et $P(X \geqslant 1,5)$.

• On sait que $P(1,1 \leqslant X \leqslant 1,4) = \int_{1,1}^{1,4} f(x)\, dx$. On a vu qu'une primitive de f est la fonction F définie par $F(x) = -\frac{2}{x}$.

Donc $P(1,1 \leqslant X \leqslant 1,4) = F(1,4) - F(1,1) = -\frac{2}{1,4} - \left(-\frac{2}{1,1}\right) = \frac{30}{77} \approx 0,39$

• On sait que $P(X \geqslant 1,5) = P(X > 1,5) = \int_{1,5}^{2} f(x)\, dx = F(2) - F(1,5) = -\frac{2}{2} - \left(-\frac{2}{1,5}\right) = \frac{1}{3}$.

2.3 Espérance mathématique

Définition Soit X une variable aléatoire muni d'une fonction de densité f sur l'intervalle sur $[a; b]$. On appelle espérance mathématique de X, et on note $E(X)$, le nombre réel :

$$E(X) = \int_a^b x\, f(x)\, dx$$

Exemple Calculons l'espérance de la variable aléatoire X dont une fonction de densité est la fonction f définie sur $[1; 2]$ par $f(x) = \frac{2}{x^2}$.

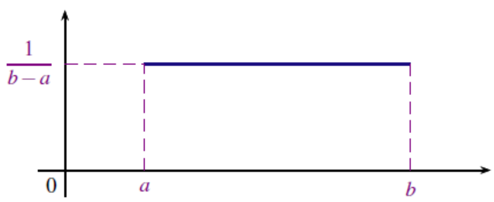
Par définition $E(X) = \int_1^2 xf(x)\, dx$. De plus $xf(x) = x \times \frac{2}{x^2} = \frac{2}{x} = 2 \times \frac{1}{x}$.
Une primitive de $x \to xf(x)$ est donc la fonction G définie sur $[1; 2]$ par $G(x) = 2\ln(x)$.
On a donc $E(X) = G(2) - G(1) = 2\ln(2) - 2\ln(1) = 2\ln(2)$.

III Lois usuelles à densité

3.1 Loi uniforme

Définition Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un intervalle $[a; b]$.
On dit que X suit la loi uniforme sur $[a; b]$ si sa fonction de densité f est définie sur $[a; b]$ par $f(x) = \frac{1}{b-a}$ (fonction constante). On note $X \sim \mathcal{U}[a; b]$.

Remarques



La fonction f définie sur $[a;b]$ par $f(t) = \frac{1}{b-a}$ est une densité de probabilité sur $[a;b]$:

— f est continue et positive sur $[a;b]$.

— $\int_a^b \frac{1}{b-a} \mathrm{d}t = \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^b = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = 1$.

Propriétés Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$.
(i) Pour tous réels c et d appartenant à $[a;b]$ et tels que $c < d$, on a :

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a} = \frac{longueur\ de\ [c,d]}{longueur\ de\ [a;b]}$$

(ii) L'espérance de X est : $E(X) = \frac{a+b}{2}$

Démonstration

- $P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\ dx.$

  Une primitive de f sur $[a;b]$ est la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{b-a}x$

  On a donc $P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\ dx = F(d) - F(c) = \frac{1}{b-a}d - \frac{1}{b-a}c = \frac{d-c}{b-a}$
- $E(x) = \int_a^b xf(x)\ dx$. Or $xf(x) = \frac{1}{b-a}x$.

  Une primitive de $x \to xf(x)$ est la fonction G définie sur $[a;b]$ par
  $G(x) = \frac{1}{b-a} \times \frac{1}{2}x^2 = \frac{x^2}{2(b-a)}$

  On a donc

$$\begin{aligned} E(X) = \int_a^b xf(x)\ dx &= G(b) - G(a) \\ &= \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)} \\ &= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} \\ &= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Exercice

Le temps d'attente T, en minutes, auprès du standard téléphonique du service après vente d'une entreprise suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0{,}5;9{,}5]$.

1. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes ?
3. Quelle est le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique ?

Solution

La variable aléatoire T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0{,}5;9{,}5]$, donc la densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0{,}5;9{,}5]$ par $f(t) = \frac{1}{9{,}5-0{,}5} = \frac{1}{9}$.

Le temps d'attente T, en minutes, auprès du standard téléphonique du service après vente d'une entreprise suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0{,}5;9{,}5]$.

1. La probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes est $P(X \leqslant 2) = \frac{2-0{,}5}{9} = \frac{1}{6}$.
2. La probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes est $P(X \geqslant 3) = \frac{9{,}5-3}{9} = \frac{13}{18}$.
3. L'espérance mathématique de T est $E(T) = \frac{0{,}5+9{,}5}{2} = 5$.
   Le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique est de 5 minutes.

Remarque La loi uniforme est la loi suivie par la variable aléatoire à un nombre choisi au hasard entre a et b avec « les mêmes chances » d'obtenir chaque résultats. La calculatrice permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}[0;1]$ via la commande **NbrAléat** (menu **Math**, sous-menu **PRB**).

3.2 Loi normale centrée réduite

Définition Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que X suit la loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0;1)$, si la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est une fonction de densité de X.

Remarques - Calculatrices

Il est impossible de trouver une primitive de la fonction φ. Ainsi on ne peut pas calculer de façon exacte $P(c \leqslant X \leqslant d) = \displaystyle\int_c^d \varphi(x)\, dx$. On peut donner une valeur approchée de cette probabilité grâce à la calculatrice :

- Sur TI : Dans le menu **distrib** (touche 2nd puis touche var) choisir le numéro 2 : **NormalFRép** ou **normalcdf** puis dans la parenthèse saisir $c, d, 0, 1$ et enfin fermer la parenthèse.
- Sur Casio : Dans le menu **Catalog** (touche SHIFT puis touche 4) choisir la fonction **NormCD** puis dans la parenthèse saisir $c, d, 1, 0$ (Attention ordre 1 et 0) et enfin fermer la parenthèse.

Si on doit calculer $P(X \leqslant d)$, il nous manque la valeur de c pour la calculatrice. On dit alors que $P(X \leqslant d) \approx P(-10^{99} \leqslant X \leqslant d)$.

Pour $P(X \geqslant c)$ on dira $P(X \geqslant c) \approx P(c \leqslant X \leqslant 10^{99})$.

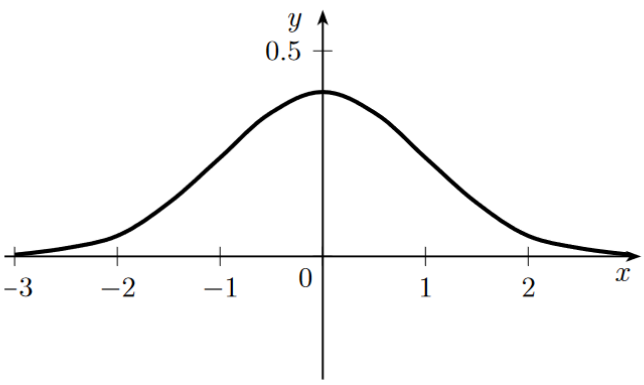
Exemple

Soit X une VAR qui suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de : $P(-2 \leqslant X \leqslant 1)$, $P(X \leqslant 3)$, $P(-1 \leqslant X \leqslant 1)$, $P(-3 \leqslant X \leqslant 3)$.

$P(-2 \leqslant X \leqslant 1) \approx 0,819$, $P(X \leqslant 3) \approx 0,999$, $P(-1 \leqslant X \leqslant 1) \approx 0,683$, $P(-3 \leqslant X \leqslant 3) \approx 0,997$.

Propriété Si X suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$ alors $E(X) = 0$ (Espérance nulle) et $\sigma(X) = 1$ (Ecart-type égal à 1).

Voici la représentation graphique de la fonction φ, densité d'une loi normale centrée réduite :



Densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

Cette courbe est appelée gaussienne ou courbe en cloche (ou de Gauss).

Pour tout réel $x, \varphi(-x) = \varphi(x)$, la courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Remarque L'aire du domaine « illimité » compris entre la courbe et l'axe des abscisses est égale à 1 (car φ est une densité de probabilité). On a donc et on note : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}\, dx = 1$.

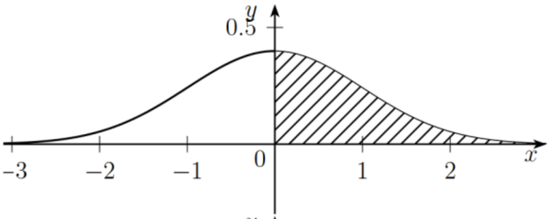
Grâce à des considérations graphiques, on peut énoncer les propriétés suivantes :

Propriétés Soit $X \sim \mathcal{N}(0; 1)$. Alors pour tout réel d strictement positif, on a :
(i) $P(X \geq 0) = \frac{1}{2}$

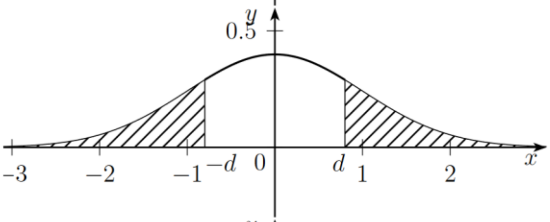
(ii) $P(X \leq -d) = P(X \geq d)$

(iii) $P(-d \leq X \leq d) = 2 \times P(0 \leq X \leq d)$

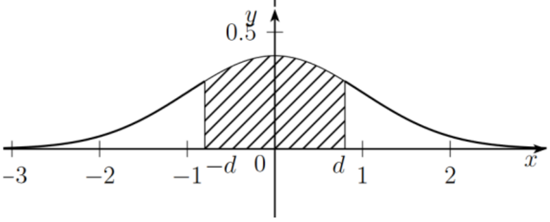
Démonstration



$P(X \geqslant 0) = \frac{1}{2}$

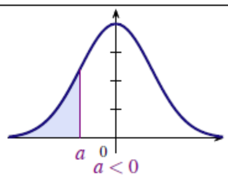
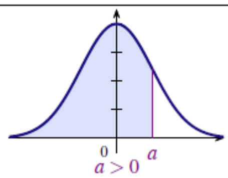
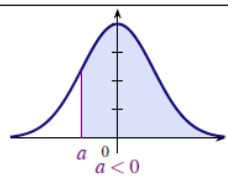
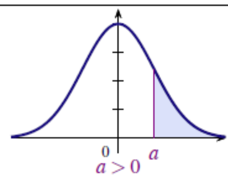


$P(X \leqslant -d) = P(X \geqslant d)$



$P(-d \leqslant X \leqslant d) = 2 \times P(0 \leqslant X \leqslant d)$

Autres méthodes de calculs

Probabilité	$P(X \leqslant a)$ avec $a < 0$	$P(X \leqslant a)$ avec $a > 0$	$P(X \geqslant a)$ avec $a < 0$	$P(X \geqslant a)$ avec $a > 0$
Graphique				
Calcul	$0{,}5 - P(a < X < 0)$	$0{,}5 + P(0 < X \leqslant a)$	$0{,}5 + P(a \leqslant X < 0)$	$0{,}5 - P(0 < X < a)$

3.3 Loi normale (de Laplace-Gauss)

Définition Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, signifie que la variable aléatoire $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. On note : $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$.

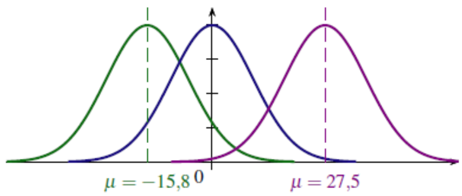
En fait, voici la véritable d'une variable aléatoire suivant la loi normale de Laplace-Gauss. **Cette définition est hors-programme en Terminale ES.**

Définition Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ (cad variance égale σ^2), signifie qu'elle admet pour fonction de densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

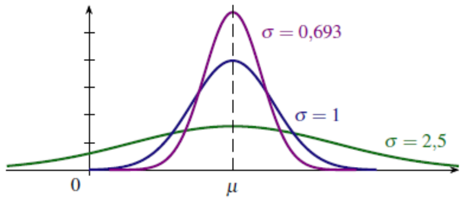
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$$

Remarques

— L'espérance μ de la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ est un paramètre de position : la courbe représentative de la fonction de densité admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \mu$.



— L'écart-type $\sigma > 0$ de la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ est un paramètre de dispersion : plus σ est élevé, plus les réalisations de X sont dispersées autour de μ.



Remarques – Calculatrices

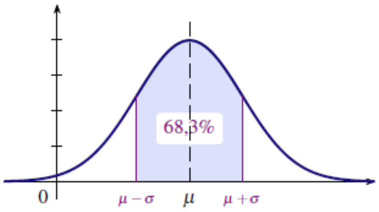
Tout comme pour la loi normale centrée réduite il est impossible de trouver une primitive de f et donc de calculer de façon exacte $P(c \leqslant X \leqslant d)$. On peut donc uniquement calculer une valeur approchée de cette probabilité à l'aide de la calculatrice :

- Sur TI : Dans le menu **distrib** (touche 2nd puis touche var) choisir le numéro 2 : **NormalFRép** ou **normalcdf** puis dans la parenthèse saisir c, d, la valeur de μ, puis la valeur de σ et enfin fermer la parenthèse.
- Sur Casio : Dans le menu **Catalog** (touche SHIFT puis touche 4) choisir la fonction **NormCD** puis dans la parenthèse saisir c, d, la valeur de σ, puis la valeur de μ (Attention ordre σ et μ) et enfin fermer la parenthèse.

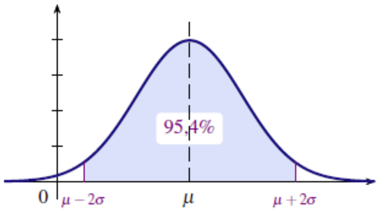
Le programme de Terminale ES exige de connaître trois valeurs (particulières) de probabilités :

Propriétés Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma)$. Alors on a :
(i) $P(\mu - \sigma \leq X \leq \pi + \sigma) \approx 0{,}68$
(ii) $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \pi + 2\sigma) \approx 0{,}954$
(iii) $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \pi + 3\sigma) \approx 0{,}997$

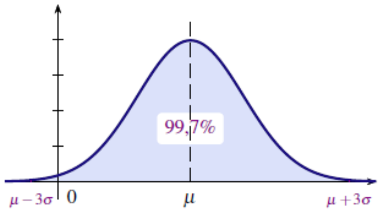
Explication



$X \in [\mu-\sigma;\mu+\sigma]$



$X \in [\mu-2\sigma;\mu+2\sigma]$



$X \in [\mu-3\sigma;\mu+3\sigma]$

Exemple Dans une entreprise, la demande mensuelle de pièces automobiles du même type suit une loi normale d'espérance $\mu = 600$ et d'écart-type $\sigma = 40$.
Déterminons le nombre a de pièces demandées pour que la demande mensuelle soit comprise entre $600 - a$ et $600 + a$ pièces, avec une probabilité de 0,954.

Notons X la variable aléatoire égale à la demande mensuelle.
L'énoncé nous demande de trouver la valeur de a tel que $P(600 - a \leqslant X \leqslant 600 + a) = 0,95$.
On sait, d'après notre cours, que $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$ donc on sait que $P(600 - 80 \leqslant X \leqslant 600 + 80) \approx 0,95$.
Ainsi on remarque que si on choisit $a = 80$ on aura bien le résultat demandé.

Un peu d'histoire des maths

- Carl Friedrich Gauss (1777, Brunswick – 1855, Göttingen) est considéré par ses pairs comme le prince des mathématiques.

Il est à la fois le dernier des classiques et le premier des modernes, c'est-à-dire qu'il a résolu les problèmes les plus classiques avec les méthodes les plus modernes. Par exemple, il démontra comment partager une tarte en 17 parts égales à l'aide des seules règle et compas, ce qui était un problème ouvert depuis les grecs. Mieux, il démontra pour quels nombres ce partage en parts égales est possible. Gauss était un génie particulièrement précoce : on dit qu'à trois ans, il corrigea une erreur dans le livre de comptes de son père. Un jour l'instituteur de sa classe, soucieux d'avoir la paix, propose aux élèves de calculer la somme des cents premiers entiers. La longueur du calcul semblait certaine… Il ne faut que quelques secondes à Gauss pour répondre ! Il remarque en effet que $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \cdots = 50 + 51$, d'où le résultat : $50 \times 101 = 50\ 050$. Gauss n' a que 10 ans ! Toutes ces anedoctes sont racontées par Gauss lui-même, très soucieux de se forgez une image édifiante. Parmi ses autres prouesses, on lui doit la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre (« *Tout plolynôme non constants à coefficients complexes admet au moins une racine dans le corps des nombres complexes* .»), dans sa thèse de doctorat en 1799. Son traité en deux volumes *Theoria motus corporum coelestium in* *sectionibus conicis Solem ambientium* (1809) restera pendant plusieurs décennies la référence en matière de calculs appliqués à l'astronomie (malgré l'absence de l'étude du mouvement parabolique, effectuée par Olbers quelques années auparavant). En particulier y est décrite la célèbre loi normale (ou loi de Laplace-Gauss) pour l'estimation des erreurs. On lui doit aussi d'importants travaus en éléctricité et en optique.

- Pierre-Simon De Laplace est un mathématicien, physicien et astronome français (1746, Beaumont-en-Auge – 1827, Paris), fils d'un fermier normand. Il étudie à l'Académie militaire de sa région, puis quitte la Normandie, à dix-huit ans, pour se consacrer aux mathématiques à Paris.

Sur la recommandation de D'Alembert, sensible à ses aptitudes hors du commun, il obtient un poste de professeur à l'Ecole militaire de Paris. La Révolution le laisse neutre, il ne s'engage pas. On le sollicite néanmois pour enseigner à l'Ecole Polytechnique, il participe à la réforme des poids et mesures, et Napoléon le nommera ministre ultérieurement. Laplace est avant tout un théoricien de l'astronomie. Sa passion pour cette discipline est la pretexte à de nombreuses études mathématiques de premier ordre, en particulier dans le domaine des équations différentielles et sur la théorie des probabilités. On l'a surnomoné le *Newton français*. Les travaux de Laplace concernant la théorie de la gravitation sont considérables. Il étudie et explique la perturbabtion de l'orbite des planètes et reste célèbre pour son hypothèse sur l'origine de l'univers, issu, suivant une idée de Kant, d'une nébuleuse primitive. S'intéressant à la mécanique céleste, il introduit, pour en faire l'étude, un embryon de calcul matriciel. Dès 1774, Laplace se passione pour les probabilités. Il utilise les densités de probablités et établit, le premier, que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}\, dx = 1$. Pour Laplace, la nature est le fondement de la découverte scientifique, les mathématiques n'en sont qu'un instrument, certes priviligié – et qu'il manie avec aisance.

- *Pour aller plus loin* : l'histoire de la courbe de Gauss (ou en cloche) -> http://images.math.cnrs.fr/La-courbe-verte-en-cloche.html