**Lycée militaire de Saint-Cyr** **DS n°1 de mathématiques** **303**

**Lundi 19 septembre 2016**

*Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.*

**<u>Questions de cours</u>**

1. Donner la définition de la suite géométrique $(u_n)$ de raison $q$ et de premier terme $u_0$.
2. Donner la formule de la somme des termes de la suite $(q^n)$ c'est-à-dire :
   $1 + q + q^2 + \cdots + q^n =$
3. Compléter la propriété suivante :
   Soit $(u_n)$ une suite telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Alors, on a pour tous réels $a$ et $b$ :
   $\lim\limits_{n\to+\infty} au_n + b =$

**<u>Exercice 1</u>**

1. Donner la valeur exacte de la somme suivante :
$$1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$
2. Soit $(v_n)$ la suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{3}$.
   a) Calculer les quatre premiers termes. *Donner les valeurs exactes*.
   b) Soit $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.
   Exprimer $S_n$ en fonction de $n$.
   c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

**<u>Exercice 2</u>**

Un loueur de voitures dispose au 1er mars 2015 d'un total de 10 000 voitures pour l'Europe.
Afin d'entretenir son parc automobile, il décide de revendre, au 1er mars de chaque année, 25 % de son parc et d'acheter 3 000 voitures neuves.
On modélise le nombre de voitures de l'agence à l'aide d'une suite.
Pour tout entier naturel $n$, on note $u_n$ le nombre de voitures présentes dans le parc automobile au 1er mars de l'année $2015 + n$.
On a donc $u_0 = 10\,000$.

1. Expliquez pourquoi, pour tout entier naturel $n$ :
$$u_{n+1} = 0{,}75u_n + 3\,000$$
2. Pour tout entier naturel $n$, on considère la suite $(v_n)$ définie par :
$$v_n = u_n - 12\,000$$
   a) Montrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 0,75.
   Préciser son 1er terme.
   b) En déduire l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.

c) Déterminer la limite de $(v_n)$.

d) Justifier que, pour tout entier naturel $n$ :

$$u_n = 12\,000 - 2\,000 \times 0{,}75^n$$

e) En vous appuyant sur les réponses données aux deux questions précédentes, que pouvez-vous conjecturer sur le nombre de voitures que comptera le parc automobile de ce loueur au bout d'un grand nombre d'années ?

**BONUS !**

Soit $(u_n)$ la suite définie par : $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique. En déduire l'expression de $(v_n)$ en fonction de $n$.

2. Soit $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.
Exprimer $S_n$ en fonction de $u_n$ et $u_0$.

3. En déduire : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

**Barème indicatif : QC** : 1,5 **Ex 2** : 3,5 **Ex 3** : 5