LMSC **Corrigé de l'Interrogation de mathématiques** **TES**

Exercice 1

1.

Pour tout réel x :

$$\frac{e^{2x^2}}{e^{x+1}} = e^2 \iff e^{2x^2-x-1} = e^2$$
$$\iff 2x^2 - x - 1 = 2$$
$$\iff 2x^2 - x - 3 = 0$$

Le discriminant du trinôme $2x^2 - x - 3$ est $\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-3) = 25$

$\Delta > 0$ donc l'équation $2x^2 - x - 3 = 0$ a deux solutions :

$$x_1 = \frac{1-5}{4} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $\dfrac{e^{2x^2}}{e^{x+1}} = e^2$ est $S = \left\{-1; \dfrac{3}{2}\right\}$.

2.

Pour tout réel x :

$$e^{3x-2} \times e^{3-5x} \geqslant 1 \iff e^{3x-2+3-5x} \geqslant e^0$$
$$\iff -2x + 1 \geqslant 0$$
$$\iff -2x \geqslant -1$$
$$\iff x \leqslant \frac{1}{2}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{3x-2} \times e^{3-5x} \geqslant 1$ est l'intervalle $S = \left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$.

Exercice 2

1. C)

Le nombre dérivé $f'(1)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1 d'où $f'(1) = -e^2$

2. B)

Par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction g est :

x	0		2		5
$g(x)$		$\searrow$	− 0,5	$\nearrow$	

Nous pouvons en déduire que $g'(x) \leqslant 0$ sur l'intervalle $[0; 2]$ et $g'(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[2; 5]$

3. B)

Soit t % le pourcentage mensuel moyen d'évolution du prix du Pétrole Brent sur la période de 5 mois:

$$113{,}5\times\left(1+\frac{t}{100}\right)^5=77{,}8 \iff \left(1+\frac{t}{100}\right)^5=\frac{77{,}8}{113{,}5}$$
$$\iff 1+\frac{t}{100}=\left(\frac{77{,}8}{113{,}5}\right)^{\frac{1}{5}}$$
$$\iff \frac{t}{100}=\left(\frac{77{,}8}{113{,}5}\right)^{0{,}2}-1$$
$$\text{Soit}\quad t\approx -7{,}28$$

Le cours du Pétrole Brent a baissé d'environ 7,28 % par mois entre le 13 juin 2014 et le 13 novembre 2014.

4. C)

Pour tout réel x,

$$\frac{e^{2x^2+1}}{e^{x+2}}=1 \iff e^{2x^2+1-(x+2)}=1$$
$$\iff e^{2x^2-x-1}=e^0$$
$$\iff 2x^2-x-1=0$$

Cherchons les solutions de l'équation du second degré $2x^2-x-1=0$ avec $a=2$, $b=-1$ et $c=-1$. Le discriminant du trinôme est $\Delta=b^2-4ac$ d'où :

$$\Delta=(-1)^2-4\times 2\times(-1)=9$$

$\Delta>0$ donc l'équation a deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\quad\text{Soit}\quad x_1=\frac{1-3}{4}=-\frac{1}{2}$$
$$\text{et}\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\quad\text{Soit}\quad x_2=\frac{1+3}{4}=1$$

5. A)

$\frac{1}{x}$ n'est pas définie en 0. Par conséquent, l'inéquation $e^{\frac{1}{x}}\geqslant e$ n'est pas définie pour $x=0$.

Pour tout réel x non nul,

$$e^{\frac{1}{x}}\geqslant e \iff e^{\frac{1}{x}}\geqslant e^1$$
$$\iff \frac{1}{x}\geqslant 1 \quad \text{La fonction exponentielle est strictement croissante}$$
$$\iff \frac{1-x}{x}\geqslant 0$$

Étudions le signe du quotient à l'aide d'un tableau de signes

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
Signe de x	$-$	||	$+$	|	$+$	
Signe de $(1-x)$	$+$	||	$+$	0	$-$	
Signe de $\frac{1-x}{x}$	$-$	||	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{\frac{1}{x}}\geqslant e$ est l'intervalle $]0;1]$

Exercice 3

1.

f est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables. $f = \dfrac{u}{v}$ d'où $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec pour tout réel $x \in \left]0;+\infty\right[$: $\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^x + 1 & \text{d'où} \quad u'(x) = \mathrm{e}^x \\ & \text{et} \\ v(x) = x & \text{d'où} \quad v'(x) = 1 \end{cases}$

Soit pour tout réel x strictement positif,

$$f'(x) = \frac{x\,\mathrm{e}^x - (\mathrm{e}^x + 1)}{x^2} = \frac{x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - 1}{x^2}$$

La dérivée de la fonction f est la fonction f' définie sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$ par $f'(x) = \dfrac{(x-1)\,\mathrm{e}^x - 1}{x^2}$.

2.

Pour tout réel x,

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \quad \text{d'où} \quad f'(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$$

La dérivée de la fonction f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$.

3.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^2 - x + 1$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = 2x - 1$.

Par conséquent, la fonction $f = \mathrm{e}^u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'\mathrm{e}^u$

La dérivée de la fonction f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{x^2 - x + 1}$.

Exercice 4

1. a)

f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables : $f = uv$ d'où $f' = u'v + uv'$ avec pour tout réel x, $\begin{cases} u(x) = 4 - 2x & ; \quad u'(x) = -2 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-0{,}5x} & ; \quad v'(x) = -0{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} \end{cases}$

Soit pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} + (4 - 2x) \times \left(-0{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}\right) \\ &= -2\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} - 2\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} + x\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} \\ &= -4\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} + x\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} \\ &= (x - 4)\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} \end{aligned}$$

f' est la fonction définie pour tout réel x par $f'(x) = (x-4)\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}$

b)

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-0{,}5x} > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $(x - 4)$.

Les variations de la fonction f se déduisent du signe de sa dérivée. D'où le tableau de variation de la fonction :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-4\,\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	

2.

$f(0)=4$ et $f(2)=0$. Sur l'intervalle $[0;2]$, la fonction f est dérivable donc continue, strictement décroissante et $f(2)<1<f(0)$ alors, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, :

l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution $\alpha \in [0;2]$. À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 1{,}12$

3.

Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est :

$$y = f'(0)\times x + f(0)$$

Or $f(0)=4$ et $f'(0)=-4$ d'où :

La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 a pour équation $y=-4x+4$.

4. a)

$$\begin{aligned} f''(x) &= \mathrm{e}^{-0{,}5x} + (x-4)\times\left(-0{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-0{,}5x} - 0{,}5x\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} + 2\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} \\ &= \left(3-0{,}5x\right)\mathrm{e}^{-0{,}5x} \end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée seconde de la fonction f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = \left(3-0{,}5x\right)\mathrm{e}^{-0{,}5x}$. Sur $\mathbb{R}$, $f''(x)$ est du même signe que $\left(3-0{,}5x\right)$

x	$-\infty$		6		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		+	0	−	
Convexité de f		f est convexe		f est concave	

La fonction f est convexe sur l'intervalle $]-\infty;6]$ et concave sur l'intervalle $[6;+\infty[$.

b)

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe pour $x=6$ donc la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion d'abscisse 6. D'autre part, $f(6)=-8\,\mathrm{e}^{-3}$

La courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion de coordonnées $\left(6;-8\,\mathrm{e}^{-3}\right)$.