

### Petit historique sur les suites

L'un des premiers travaux portant sur les suites de nombres semble provenir d'Archimède (très brillant scientifique grec de Sicile, mathématicien physicien et ingénieur ; 287 av.J.C – 212 av.J.C). Dans son traité « La mesure du cercle », pour trouver une valeur approchée de  $\pi$ , il avait eu la brillante idée de considérer des polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle de rayon 1 : d'abord deux triangles équilatéraux puis deux carrés, deux pentagones, ect.

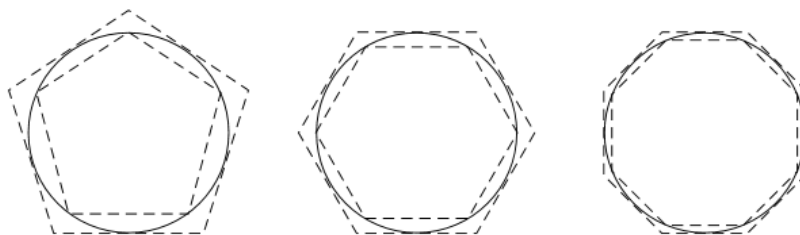


Figure : Exemples de polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle : pentagone, hexagone et octogone.

Comme on peut le voir sur la figure ci-dessus, plus le nombre de côtés du polygone inscrit au cercle est grand et plus son périmètre est proche de la circonférence du cercle tout en lui restant inférieur. De même, plus le nombre de côtés du polygone circonscrit est grand et plus son périmètre est proche de la circonférence du cercle tout en lui restant supérieur. Les périmètres de ces deux polygones forment ainsi deux suites de nombres qui encadrent la circonférence du cercle, en l'occurrence  $2\pi$ . Comme Archimède de nombreux autres grands scientifiques (Fibonacci, Lucas, Bernoulli, Newton, Moivre, Cauchy, Wallis, pour ne citer qu'eux...) vont, historiquement s'intéresser aux suites dans le but d'approcher des valeurs numériques.

Au cours du XVII<sup>e</sup> et du XVIII<sup>e</sup> siècle, l'intuition et le génie de mathématiciens tels Euler ou Bernoulli amènent à l'établissement de nombreux résultats relatifs aux suites, reléguant parfois au second plan les limites de validité de leurs découvertes.

Il faut donc attendre le XIX<sup>e</sup> siècle pour qu'Augustin Louis Cauchy (mathématicien français réputé pour sa rigueur et sa finesse ; 1789 – 1857) pose les fondements rigoureux de la théorie des suites. Cauchy prend ainsi sa revanche sur les illustres mathématiciens du XVII<sup>e</sup> et du XVIII<sup>e</sup> siècle. Deux événements décisifs viennent alors donner un élan supplémentaire aux suites : l'introduction de la notation indicielle qui consiste à repérer chaque terme d'une suite par une même lettre affectée d'un indice et le point de vue de Peano (mathématicien italien, la définition axiomatique des entiers naturels porte son nom ; 1857 – 1932) qui définit une suite comme étant une fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ . Plus récemment, dans la seconde moitié du XX<sup>e</sup> siècle, le développement des outils de calcul va logiquement donner un nouvel essor à l'étude des suites. A l'heure actuelle, les domaines d'application des suites sont bien vastes : Analyse numérique, Mathématiques financières, Physique, Biologie, ect.

# I Suites géométriques

## 1.0 Quelques rappels

**Définition** Une suite numérique  $u$  est une fonction de  $\mathbb{N}$  (ou d'une partie de  $\mathbb{N}$ ) dans  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire une fonction qui à tout entier naturel  $n$  associe un réel, noté  $u(n)$  ou, plus généralement,  $u_n$  (notation indicielle).

$$\text{Ainsi : } u : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{cases}.$$

### Remarques (Vocabulaire, notations)

1.  $n$  est l'indice (ou le rang) et  $u_n$  est le terme de rang  $n$ . Par exemple,  $u_{n+1}$  est le terme de rang  $n + 1$  ( le terme suivant  $u_n$ ) alors que  $u_n + 1$  est le terme de rang  $n$  augmenté de 1.
2. Attention !!  $(u_n)$  désigne la suite alors que  $u_n$  désigne le terme de rang  $n$ .
3. Une suite peut n'être définie qu'à partir du rang 1, 2, ... (la suite qui associe à tout entier son inverse).

On rappelle que l'on peut définir une suite  $(u_n)$  par :

- Par l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ , c'est-à-dire par une **formule explicite**. Par exemple : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = n^2$ .
- Par **réurrence** : on donne le premier terme et une relation de récurrence entre un terme et le suivant. Par exemple :  $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$ .

Une suite peut être représentée graphiquement dans le plan. Contrairement à une fonction, la représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe mais **un nuage de points** car la suite n'est définie que sur  $\mathbb{N}$  (ou une partie de  $\mathbb{N}$ ).  $u_{1,5}$  n'a mathématiquement pas de sens et donc le point  $(1,5 ; u_{1,5})$  non plus.

**Définition et propriétés** 1) On dit qu'une suite  $(u_n)$  est arithmétique si, à partir de son 1<sup>er</sup> terme, chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre.

Alors, il existe un réel  $r$  tel que, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n + r$ .

Le nombre  $r$  est appelé raison de la suite arithmétique  $(u_n)$  : il est égal à la différence entre deux termes consécutifs quelconques : pour tout entier  $n$ ,  $r = u_{n+1} - u_n$ .

2) Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de premier terme  $u_0$  et de raison  $r$ .

Alors, pour tout entier  $n$ ,  $u_n = u_0 + nr$ .

Plus généralement, on a : pour tous entiers  $p$  et  $n$  tels que  $0 \leq p \leq n$ ,  $u_n = u_p + (n - p)r$ .

3) Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de premier terme  $u_0$  et de raison  $r$ .

(i) Si  $r > 0$ , la suite est strictement croissante.

(ii) Si  $r = 0$ , la suite est constante.

(iii) Si  $r < 0$ , la suite est strictement décroissante.

## 1.1 Définition et propriété

**Définition** On dit qu'une suite  $(u_n)$  est géométrique si, à partir de son 1<sup>er</sup> terme, chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre.

Alors, il existe un réel  $q$  tel que, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n \times q$ .

*Schéma :*

Le nombre  $q$  est appelé raison de la suite arithmétique  $(u_n)$  : il est égal au quotient entre deux termes consécutifs différents de 0 : pour tout entier  $n$ ,  $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ .

### Remarques

1. Si  $q = 0$ , tous les termes de la suite, hormis peut-être  $u_0$  sont nuls.  
Si  $u_0 = 0$ , tous les termes de la suite sont nuls.  
En dehors de ces deux cas triviaux, inintéressants, tous les termes de la suite sont différents de zéro.
2. Si  $q = 1$ , la suite est constante égale à son 1<sup>er</sup> terme.
3. Pour démontrer qu'une suite est géométrique, il suffit de démontrer que pour tout entier  $n$  le quotient  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  est constant (donc indépendant de  $n$ ). Cette constante sera alors la raison de la suite.

**Exemples** 1)  $v_n = 2^n$

2)  $w_n = n^2$

### Evolution en pourcentages sur quelques exemples

- Augmenter une grandeur de  $t$  % équivaut à multiplier sa valeur par  $1 + \frac{t}{100}$ .
- Diminuer une grandeur de  $t$  % équivaut à multiplier sa valeur par  $1 - \frac{t}{100}$ .

Chaque fois qu'on est confronté à une situation d'évolutions successives d'une grandeur de  $t$  %, on peut définir une suite géométrique de raison  $1 + \frac{t}{100}$  (augmentation) ou  $1 - \frac{t}{100}$  (diminution).

1) Un capital de 2 000 € est placé au taux d'intérêt composé de 1,5 % par an.

On note  $C_n$  le capital disponible au bout de  $n$  années alors :

$$C_{n+1} = \left(1 + \frac{1,5}{100}\right) \times C_n = 1,015 \times C_n$$

Ainsi, la suite  $(C_n)$  est une suite géométrique de premier terme  $C_0 = 2000$  et de raison  $q = 1,015$ .

2) Pour lutter contre la pollution, un groupe industriel décide de réduire progressivement sa quantité de rejets de 4 % par an. En 2012, la quantité de rejets était de 50 000 tonnes.

On note  $r_n$  la quantité de rejets l'année 2012 +  $n$  d'où :

$$r_{n+1} = \left(1 - \frac{4}{100}\right) \times r_n = 0,96 \times r_n$$

Ainsi, la suite  $(r_n)$  est une suite géométrique de premier terme  $r_0 = 50000$  et de raison 0,96.

#### Propriété Formule explicite

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de premier terme  $u_0$  et de raison  $q$ .

Alors, pour tout entier  $n$ ,  $u_n = u_0 \times q^n$ .

Plus généralement, on a : pour tous entiers  $p$  et  $n$  tels que  $0 \leq p \leq n$ ,  $u_n = u_p \times q^{n-p}$

*Démonstration admise*

**Remarque** Cette propriété est importante car elle transforme une suite géométrique, définie par récurrence en une suite définie explicitement.

**Exemples** 1) Soit  $(u_n)$  la suite géométrique de premier terme  $u_0 = 2$  et de raison  $q = -2$ .

2) On reprend l'exemple du groupe industriel (cf plus haut).

L'objectif de ce groupe est de réduire progressivement la quantité de rejets pour atteindre une quantité inférieure ou égale à 30 000 tonnes (soit une réduction de 40 %). Cet objectif sera-t-il atteint au bout de 10 ans ?

Au bout de 10 ans, la quantité de rejets est de :

$$r_{10} = 50000 \times 0,96^{10} \approx 33242$$

Avec une réduction de 4 % par an, en 2022 l'objectif du groupe industriel ne sera pas atteint.

## 1.2 Monotonie (Sens de variation)

### Propriété *Sens de variation*

Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = q^n$  où  $q > 0$ .

- (i) Si  $q > 1$ ,  $(u_n)$  est strictement croissante.
- (ii) Si  $0 < q < 1$ ,  $(u_n)$  est strictement décroissante.
- (iii) Si  $q = 1$ ,  $(u_n)$  est constante..

**Démonstration**  $u_{n+1} - u_n = q^{n+1} - q^n = q^n(q - 1)$ .

**Remarque** Si  $q < 0$ , alors la suite n'est pas monotone ( ex :  $u_n = (-1)^n$ ).

**Exemples 1)**  $u_n = 2^n$

2)  $v_n = \frac{1}{2^n}$

### Propriété - Généralisation *Sens de variation*

1. Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de premier terme  $u_0 > 0$  et de raison  $q$ .
  - (i) Si  $q > 1$ ,  $u$  est strictement croissante.
  - (ii) Si  $0 < q < 1$ ,  $u$  est strictement décroissante.
  - (iii) Si  $q = 1$ ,  $u$  est constante.
2. Si  $u_0 < 0$ , les résultats précédents s'inversent.

*Démonstration en exercice*

### 1.3 Somme de termes consécutifs

#### Propriété Somme des termes de la suite ( $q^n$ )

Pour tout nombre réel  $q \neq 1$  et tout entier naturel  $n$ , on a :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

#### Démonstration

② : Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$  et on calcule  $S_n - qS_n$  :

$$\begin{aligned} \text{on a : } S_n - qS_n &= 1 + q + q^2 + \dots + q^n \\ &\quad - q - q^2 - \dots - q^n - q^{n+1} \\ &= 1 + 0 + 0 + \dots + 0 - q^{n+1} \end{aligned}$$

donc  $S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$  d'où  $(1 - q)S_n = 1 - q^{n+1}$  et en divisant par  $1 - q \neq 0$

**Remarques** 1) Pour  $q = 1$ ,  $1 + q + q^2 + \dots + q^n = n + 1$ .

2) Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme  $S$  de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $q \neq 1$  est :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

#### Notation Symbole sigma

**Exemples** 1)  $\sum_{k=0}^{10} 2^k = 2^0 \frac{1-2^{11}}{1-2} = 2^{11} - 1 = 2047$ .

2)  $\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$ .

## II Limite de la suite géométrique ( $q^n$ ) avec $q > 0$

Etudier la limite d'une suite  $(u_n)$  c'est chercher ce que deviennent les termes  $u_n$  lorsque  $n$  devient très grand (on dit que «  $n$  tend vers l'infini ») ; plus précisément :

- Les termes  $u_n$  finissent-ils par se rapprocher d'un nombre fixe ?
- Les termes  $u_n$  finissent-ils par dépasser n'importe quel nombre aussi grand que l'on veut ?

En Terminale ES, on ne s'intéressera qu'aux suites du type  $u_n = q^n$  où  $q > 0$ .

### 2.1 Propriété

On a la propriété importante suivante :

#### **Propriété Admise**

- (i) Si  $q > 1$  alors la suite de terme générale  $q^n$  a pour limite  $+\infty$  et on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ .  
(ii) Si  $0 < q < 1$ , alors la suite de terme générale  $q^n$  a pour limite 0 et on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ .  
(iii) Si  $q = 1$ , alors la suite de terme générale  $q^n$  a pour limite 1 et on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$ .

#### **Remarques**

1. Lorsque la suite de terme générale  $q^n$  a pour limite  $+\infty$ , on dit aussi que la suite  $(q^n)$  diverge.
2. Lorsque  $q \leq -1$ , la suite de terme générale  $q^n$  n'admet pas de limite finie ou infinie.

**Exemples** 1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{6}\right)^n = +\infty$

### 2.2 Quelques compléments

#### **Propriété Admise**

Soit  $(u_n)$  une suite telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ . Alors, on a pour tous réels  $a$  et  $b$  :

(i)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a \times u_n = 0$

(ii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} au_n + b = b$

**Exemples** 1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

2) Soit  $S_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$ . On a vu que  $S_n = 2 - \frac{1}{2^n} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ . D'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2$

### Propriété Admise

Soit  $(u_n)$  une suite telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ . Alors, on a pour tous réels  $a$  et  $b$  :

- (i)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a \times u_n = +\infty$  si  $a > 0$ .
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a \times u_n = -\infty$  si  $a < 0$ .
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + b = +\infty$

**Remarque** Bien sûr, si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  alors (iii) devient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + b = -\infty$ .

**Exemples** 1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -4 \times 3^n = -\infty$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n + \pi = +\infty$ .

## 2.3 Recherche d'un seuil à l'aide d'un algorithme

### Exemple 1

Soit  $(U_n)$  la suite géométrique de raison 0,96 et de premier terme  $U_0 = 50000$

Comme  $0 < 0,96 < 1$  la suite  $(U_n)$  est décroissante et converge vers 0 :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 50000 \times 0,96^n = 0$ .

L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est inférieur à 30000. C'est à dire déterminer le plus petit entier  $p$  tel que pour tout entier  $n \geq p$ ,  $50000 \times 0,96^n \leq 30000$

```
INITIALISATION :  
  Affecter à N la valeur 0  
  Affecter à U la valeur 50000  
TRAITEMENT :  
  Tant_que U > 30000  
    Affecter à N la valeur N + 1  
    Affecter à U la valeur 0,96 * U  
  Fin Tant_que  
SORTIE  
  Afficher N
```

PROGRAMMATION SUR CALCULATRICES	
TEXAS	CASIO
PROGRAM : SEUIL : 0 → N : 50000 → U : While U > 30000 : N + 1 → N : 0.96*U → U : End : Disp N	===== SEUIL ===== 0 → N ↓ 50000 → U ↓ While U > 30000 ↓ N + 1 → N ↓ 0.96*U → U ↓ WhileEnd ↓ N

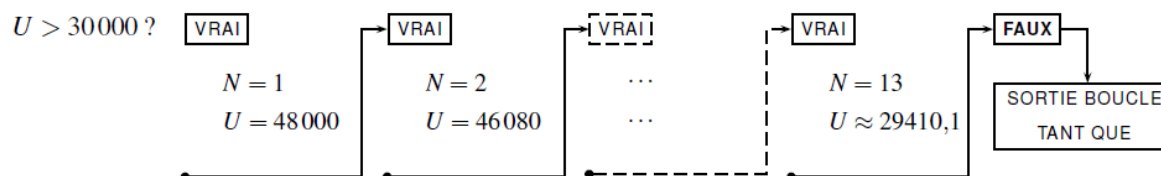
INITIALISATION :

$$N = 0$$

$$U = 50000$$

TRAITEMENT :

Tant que la condition  $U > 30000$  est vraie, on effectue la suite d'instructions situées à l'intérieur de la boucle « Tant\_que » et « Fin Tant\_que ».



SORTIE :

La calculatrice affiche 13. Donc pour tout entier  $n \geq 13$ , on a  $50000 \times 0,96^n \leq 30000$ .



## Exemple 2

Soit  $(u_n)$  la suite géométrique de raison 1,015 et de premier terme  $u_0 = 2000$   
 $1,015 > 1$  et  $u_0 > 0$  donc la suite  $(u_n)$  est croissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2000 \times 1,015^n = +\infty$ .

L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est supérieur à 3 000.  
C'est à dire déterminer le plus petit entier  $p$  tel que pour tout entier  $n \geq p$ ,  $2000 \times 1,015^n > 3000$

Initialisation :	Affecter à $N$ la valeur 0 Affecter à $U$ la valeur 2000
Traitement :	Tant_que $U \leq 3000$   Affecter à $N$ la valeur $N + 1$   Affecter à $U$ la valeur $1,015 \times U$ Fin Tant_que
Sortie :	Afficher $N$

La calculatrice affiche 28. Donc pour tout entier  $n \geq 28$ , on a  $2000 \times 1,015^n > 3000$ .

## III Suites arithmetico-géométriques

### 3.1 Définition

**Définition** Soit  $a$  et  $b$  deux réels.

On dit qu'une suite  $(u_n)$  est arithmetico-géométrique si elle est définie par la donnée de  $u_0$  (son 1<sup>er</sup> terme) et de la relation de récurrence  $u_{n+1} = au_n + b$ .

#### Cas particuliers

1. Si  $a = 0$ , alors  $(u_n)$  est constante à partir du rang 1 au moins.
2. Si  $a \neq 0, b = 0$ ,  $(u_n)$  est géométrique de raison  $a$ .
3. Si  $a = 1$ ,  $(u_n)$  est arithmétique de raison  $b$

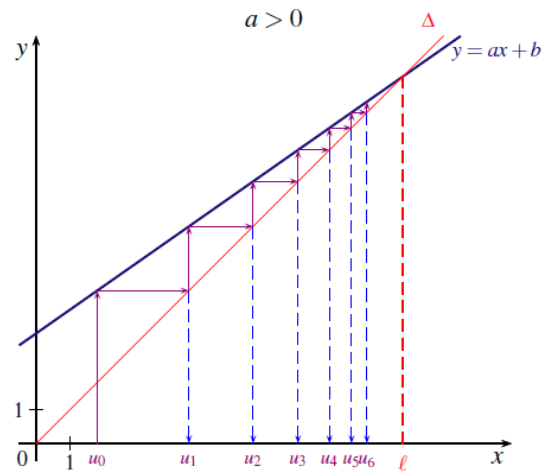
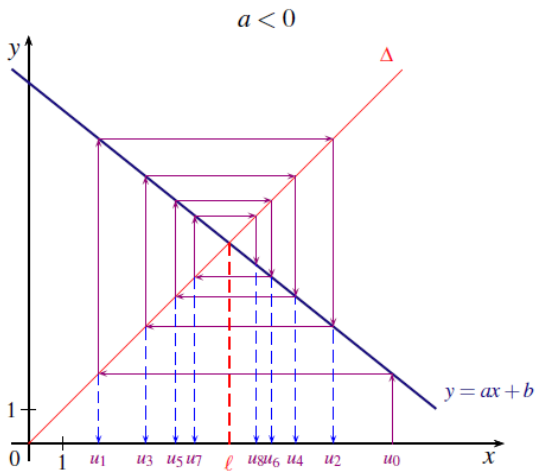
**Exemple**  $(u_n): \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$

### 3.2 Représentation graphique

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \neq 1$  et  $b \neq 0$ .

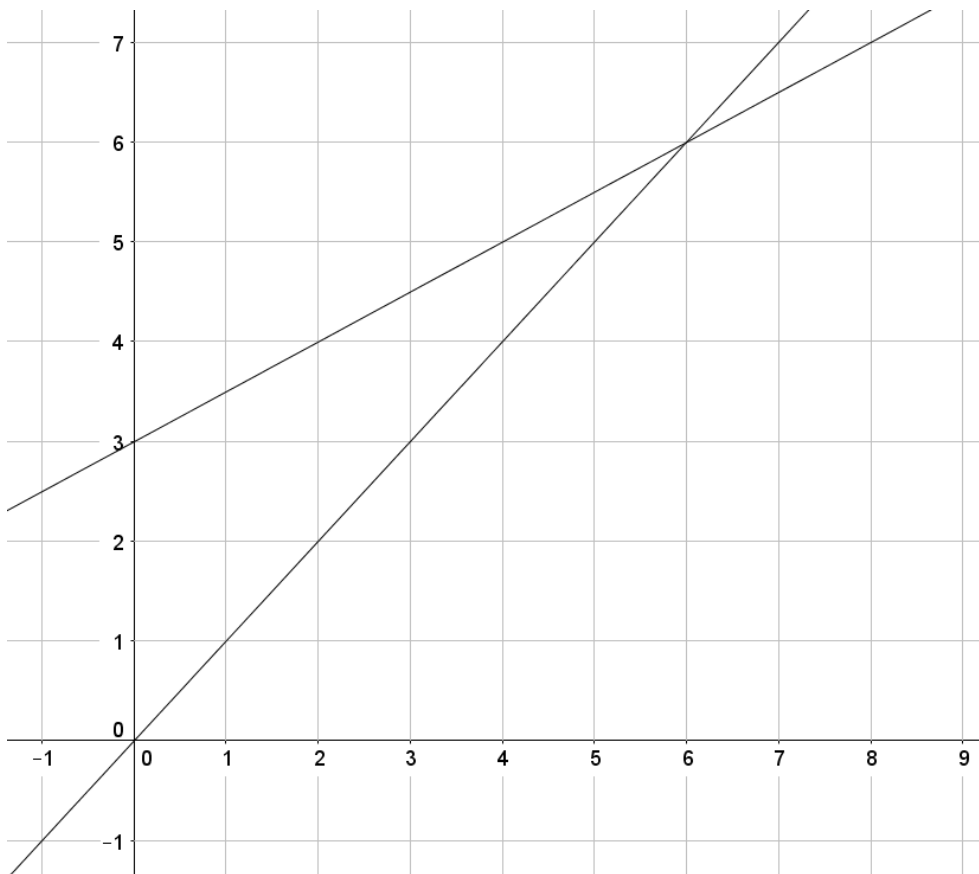
$(u_n)$  est la suite arithmético-géométrique définie par  $u_0$  et pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = au_n + b$ .

On trace la courbe représentative de la fonction affine  $f: x \mapsto ax + b$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$ .



Le graphique permet d'obtenir un certain nombre de conjectures à propos de la monotonie ou de la convergence de la suite.

**Exemple**  $(u_n): \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$



On constate que  $u_n$  converge vers 6.

**Remarque** On peut montrer que  $u_n = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$ .

