LMSC **Exercices sur la continuité et la convexité** **TES**

Exercice 1

Soit h une fonction définie et continue sur $[0; 10]$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	0		3		9		10
h	0	↗	7	↘	4	↗	6

Démontrer que l'équation $h(x) = 1$ admet une solution unique. (on pourra commencer par traiter le cas de l'intervalle $[0; 3]$).

Exercice 2

Soit f la fonction définie $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 2x - 1}{2x+1}$. On note f' sa dérivée.

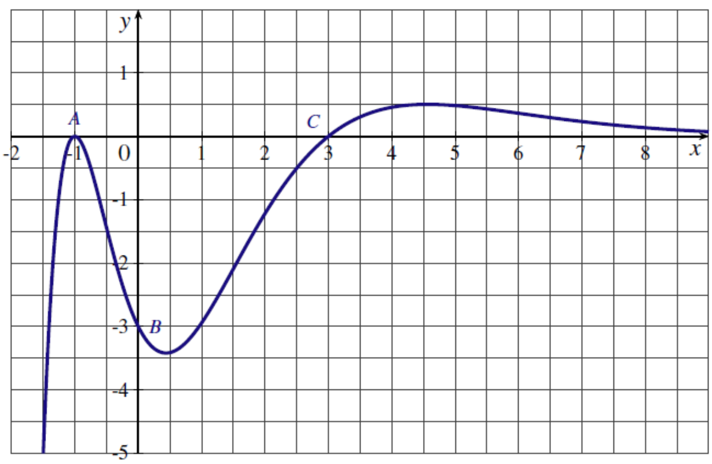
1. Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau des variations de la fonction f.
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-3} près, des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 3

1. Soit $f: x \longmapsto 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$.
   a) Dresser le tableau de variations de f.
   b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 sur l'intervalle $]-1\,;0]$.
   c) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 sur $\mathbb{R}$.
   d) A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de x_0.
   e) Déduire des questions a) et c) le tableau de signes de $f(x)$.
2. Soit $g: x \longmapsto x^4 + x^3 + x^2 + x$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$.
   a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $g'(x)$. Qu'observe-t-on ?
   b) Déduire de 1.e) le tableau de variation de g.

Exercice 4

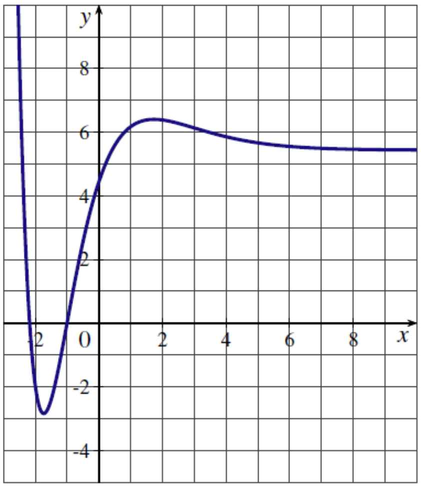
On considère une fonction f définie sur R et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, dans un repère orthonormé.
Les points $A(-1;0)$, $B(0;-3)$ et $C(3;0)$ appartiennent à la courbe.



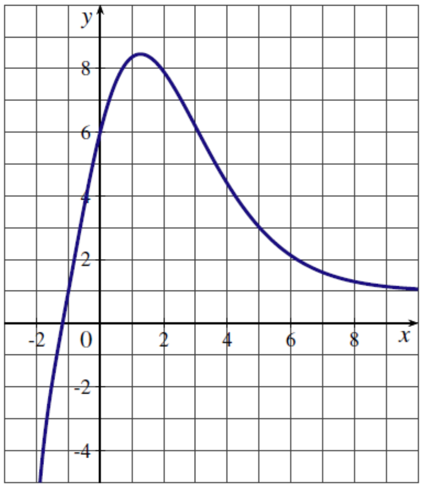
Dans cet exercice, chaque réponse sera justifiée à partir d'arguments graphiques.

1. La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion ?
2. Sur quels intervalles, la fonction est-elle convexe ? Est-elle concave ?
3. Parmi les deux courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction f : laquelle ? Justifier la réponse.

Courbe 1



Courbe 2



Exercice 5

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 20x + 8$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan.

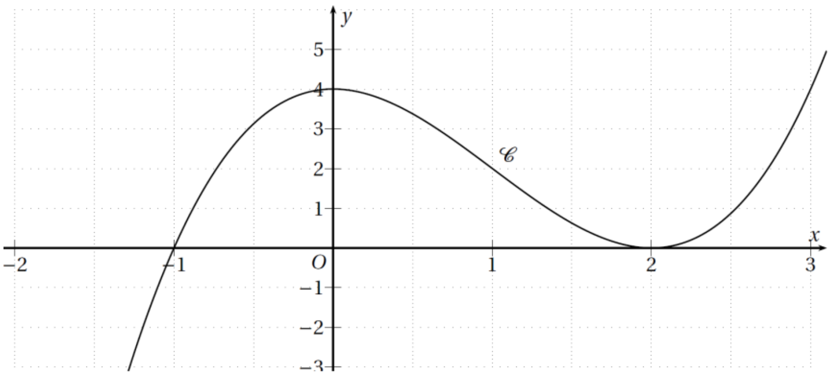
1. Étudier les variations de la fonction f.
2. a) Étudier la convexité de la fonction f.

   b) La courbe $\mathscr{C}_f$ a-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, déterminer ses coordonnées ?

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative



1. Par lecture graphique, conjecturer la convexité de f et l'existence de point(s) d'inflexion.
2. Vérifier vos conjectures par le calcul.
3. Donner l'équation des tangentes au(x) point(s) d'inflexion et les tracer sur la figure.

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $[1{,}5 ; 5]$ par :

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x-1}$$

On note C la courbe représentative de f.

Partie A   Etude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

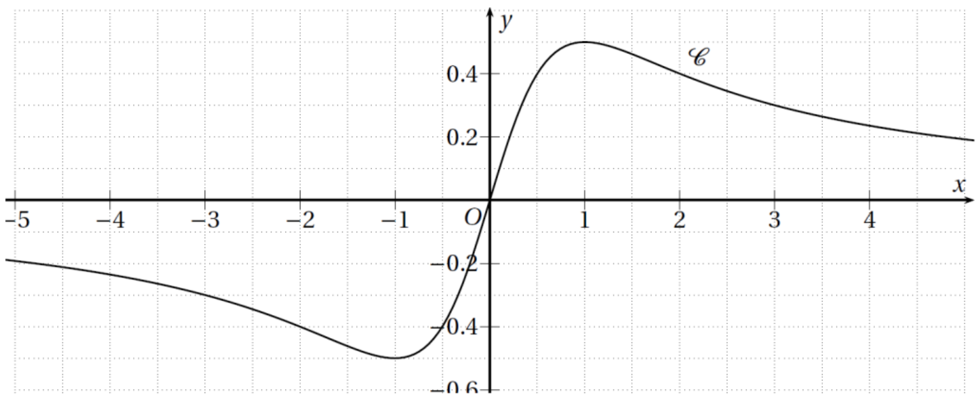
1. Etudier le sens de variations de g sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau de signes de g sur $\mathbb{R}$, puis sur $[1{,}5 ; 5]$.

Partie B   Etude de la fonction *f*

1. Montrer que, pour tout réel x de $[1{,}5 ; 5]$, on a :
$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$$
2. En déduire le tableau de signes de f' sur $[1{,}5 ; 5]$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[1{,}5 ; 5]$.
4. Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir que pour tout réel x de $[1{,}5 ; 5]$:
$$f''(x) = 2 + \frac{4}{(x-1)^3}$$
La fonction f est-elle convexe ou concave sur $[1{,}5 ; 5]$?

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.



1. Par lecture graphique, étudier la convexité de la fonction f selon les valeurs de x.
2. En déduire l'existence de trois points d'inflexion.
3. Calculer $f'(x)$, la dérivée de f et vérifier que $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$
4. Donner une équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
5. On note $d(x) = x - f(x)$.

   (a) Vérifier que $d(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

(b) En déduire le signe de $d(x)$ suivant les valeurs de x.

(c) En déduire les positions relatives de la tangente T_0 et de la courbe $\mathscr{C}$.

(d) Que peut-on en déduire pour O (l'origine du repère) ?

6. Un logiciel de calcul formel affiche les données suivantes :

```
(%i4) deriver((1-x^2)/(x^2+1)^2,x);
                                                      2
                                     2 x       4 x (1 - x )
(%o4)                            - --------- - ------------
                                     2     2      2     3
                                   (x  + 1)    (x  + 1)
(%i5) factoriser(%o4);
                                            2
                                     2 x (x  - 3)
(%o5)                                ------------
                                        2     3
                                      (x  + 1)
```

(a) Interpréter cet affichage.

(b) En déduire que $\mathscr{C}$ admet bien trois points d'inflexion dont on précisera les abscisses.

Exercice 9

Le tableau ci-dessous représente l'évolution du taux d'endettement des ménages, en pourcentage du revenu disponible brut, en France de 2001 à 2010.

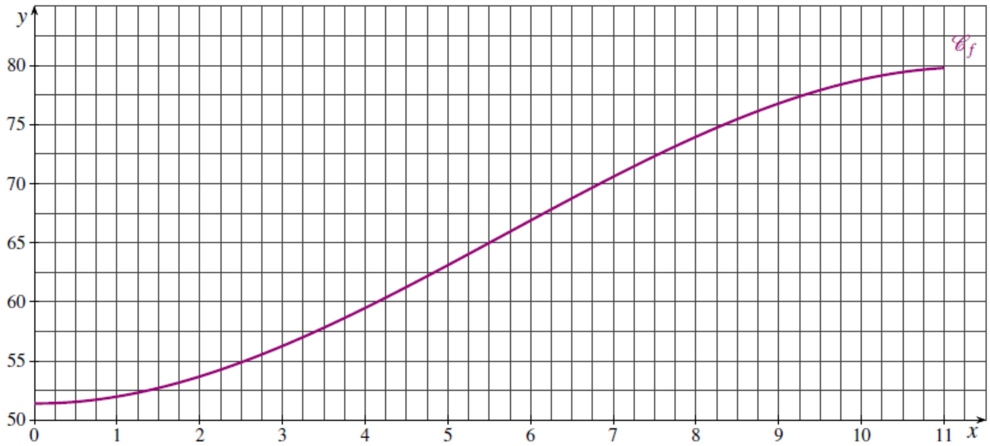
Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taux d'endettement y_i	52,2	53,2	55,6	58,6	63,4	67,4	70,9	73,5	75,7	78,9

Source : INSEE

Une estimation de l'évolution du taux d'endettement des ménages est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;11]$ par :

$$f(x) = -0{,}04x^3 + 0{,}68x^2 - 0{,}06x + 51{,}4$$

où x est le nombre d'années écoulées depuis 2000.



1. a) Calculer la valeur estimée du taux d'endettement des ménages en 2009.
   b) Calculer le pourcentage d'erreur par rapport au taux réel d'endettement des ménages en 2009.
2. a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
   b) Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
   c) La courbe $\mathscr{C}_f$ a-t-elle un point d'inflexion ?
3. Le rythme de croissance instantané du taux d'endettement est assimilé à la dérivée de la fonction f.
   Au cours de quelle année, le rythme de croissance du taux d'endettement a-t-il commencé à diminuer ?