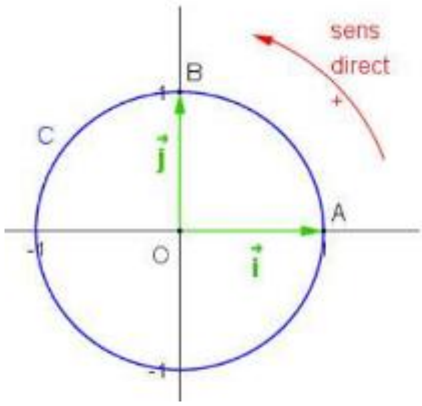
Chapitre 13	TRIGONOMÉTRIE	2de

I Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

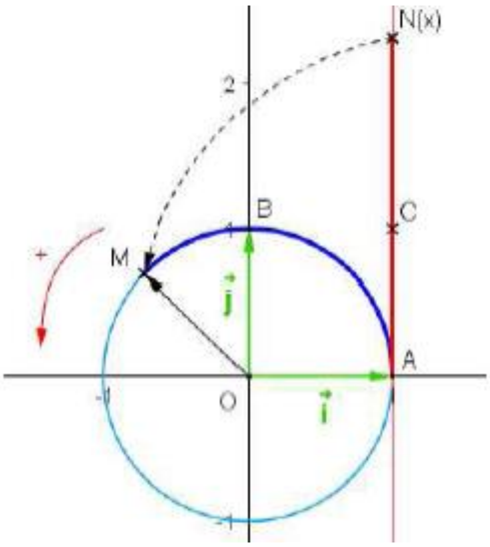
1.1 Principe

Définition *Cercle trigonométrique*
On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Le cercle trigonométrique C est le cercle de centre O et de rayon 1, sur lequel on choisit une orientation qui est appelée sens direct ou sens trigonométrique et qui correspond au sens contraire des aiguilles d'une montre.



Définition de l'enroulement

Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que (A ; $\vec{\imath}$,) soit un repère de la droite.
Si on « enroule » la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle. La longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est aussi égale à la longueur AN.



1.2 Correspondance entre abscisses et angle

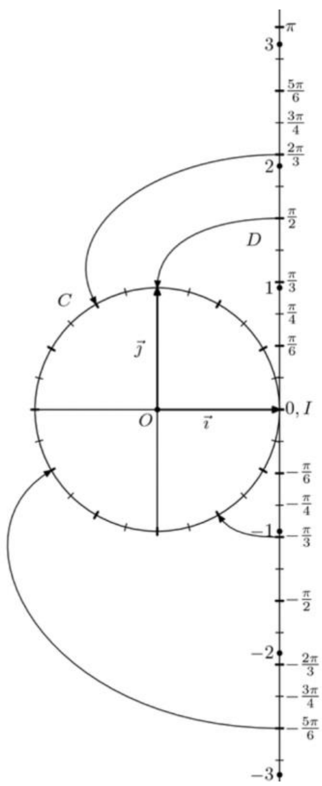
La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π. En effet, son rayon est 1 donc $P = 2\pi \times 1 = 2\pi$.
Après enroulement, le point N d'abscisse x sur la droite orientée se trouve en A sur le cercle. Cela correspond à un tour complet.
Ainsi au nombre 2π (abscisse N sur la droite orientée), on fait correspondre un angle de 360° (mesure de $\widehat{AOM}$).
Par exemple, après enroulement, le point N d'abscisse π sur la droite orientée se trouve diamétralement opposé au point A sur le cercle. Cela correspond à un demi-tour
Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

$\boldsymbol{x}$	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
$\boldsymbol{\widehat{AOM}}$	360°	180°	90°	60°	45°	30°

Définition - Propriété *Plusieurs abscisses pour un seul point*
(i) Si M est un point du cercle trigonométrique, tout réel qui lui est associé par le procédé précédent est appelé abscisse curviligne de M.
(ii) Tout point M du cercle trigonométrique admet une infinité d'abscisses curvilignes distinctes. De plus, si x est l'une d'elles alors les abscisses curvilignes de M s'écrivent
$x + k \times 2\pi = x + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple Un réel positif (resp. négatif) ayant le même point image sur le cercle que le réel $\frac{\pi}{4}$ est $\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$ resp. $\frac{\pi}{4} - 2 \times 2\pi = -\frac{15\pi}{4}$

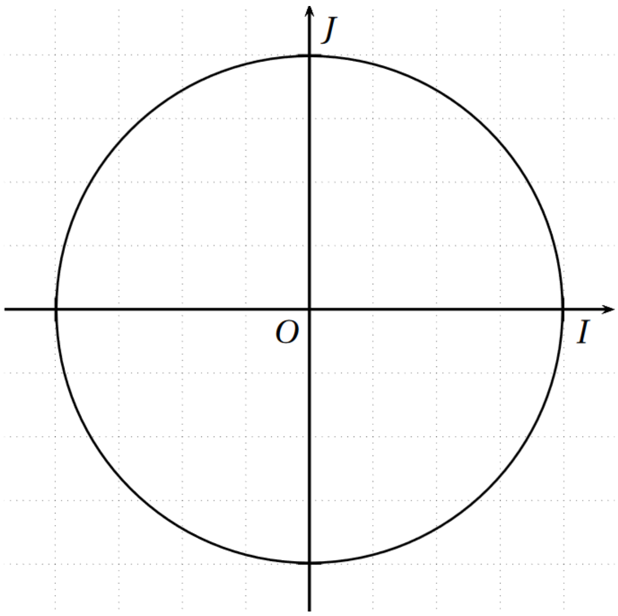
Bilan



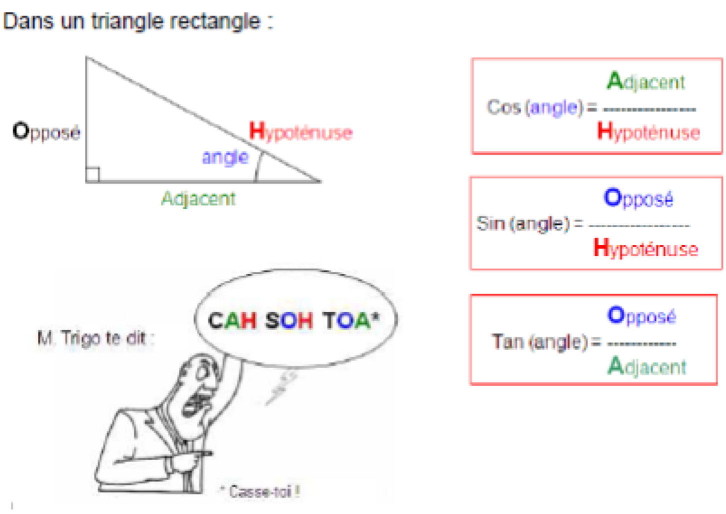
2.3 Cosinus et sinus d'un nombre réel

Définition Soit le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et C le cercle trigonométrique de centre O.
Soit M un point de C d'abscisse curviligne x, alors on appelle :
(i) cosinus de x et on note $\cos x$ ou $\cos(x)$ de M dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ l'abscisse du point M.
(ii) sinus de x et on note $\sin x$ ou $\sin(x)$ de M dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ l'ordonné du point M.

Figure



Quelques rappels



Propriété Soit le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et C le cercle trigonométrique de centre O.
$x \in [0; \frac{\pi}{2}]$. M est un point sur C d'abscisse curviligne x.
Alors, $\cos x = \cos \widehat{IOM}$ et $\sin x = \sin \widehat{IOM}$

Propriété Pour tout nombre x réel :
(i) $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
(ii) *Relation fondamentale* $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
(iii) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, pour $x \neq \frac{\pi}{2}$.

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\tan x$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\emptyset$	0

Démonstration (pour $\frac{\pi}{3}$)

Cercle trigonométrique avec les valeurs trigonométriques