Les fonctions polynômes du second degré font partie du catalogue des fonctions de référence étudiées en classe de 2nde. Dans ce chapitre, nous allons automatiser et approfondir la résolution d'équations et d'inéquations ainsi que le tracé des paraboles.

I Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré

Définitions (i) On appelle fonction de degré 2 toute fonction f de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels connus (appelés les coefficients), et $a \neq 0$. f est appelé trinôme ou polynôme du second degré.
(ii) On appelle discriminant du trinôme f le nombre défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemples 1) f(x)= $3x^2+2x-1$
2) f(x)=$-x^2-1$
3) Le discriminant du trinôme $3x^2+2x-1$ est 16
4) Le discriminant du trinôme $2x^2 - 4x$ est 4

Passons maintenant à la notion de forme canonique d'un polynôme du second degré.

L'écriture $f(x) = ax^2 + bx + c$ est certes la plus simple mais n'est généralement pas bien adaptée à la résolution d'équations ou d'inéquations. L'outil de base pour la résolution d'équations (ou d'inéquations) de degré 2 (ou supérieur à 2) est la **factorisation**.
Ainsi :

- Pour résoudre $4x^2 - 1 = 0$: on factorise en $(2x+1)(2x-1) = 0$ puis on annule chaque facteur pour trouver $S = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$.
- Pour résoudre $3x^2 + 2x = 0$: on factorise en $x(3x+2) = 0$ puis on annule chaque facteur pour trouver $S = \{0, -\frac{2}{3}\}$.
- Par contre, pour résoudre $x^2 + 2x + 5 = 0$ on a vu dans l'activité qu'aucune des stratégies étudiées en seconde ne fonctionne. D'où la propriété suivante :

Propriété Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$. Alors, on a $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. Cette dernière expression est appelée la forme canonique de $f(x)$ et on a $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a} = f(\alpha)$

Démonstration Soit $P(x)$ un polynôme du second degré de forme réduite $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} P(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + 2 \times \frac{b}{2a} \times x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

On développe partiellement : $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$.

Si l'on pose $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a} = f(\alpha)$, alors : $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Exemples 1) $f(x) = x^2 + 2x - 8$

$f(x) = (x+1)^2 - 9.$

2) $f(x) = x^2 - 4x + 8$
$f(x) = (x-2)^2 + 4.$

3) $f(t) = -2t^2 + 16t - 4$

$f(t) = -2(t-4)^2 + 28.$

II Résolution des équations du second degré

Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où a$\neq$ 0 , c'est trouver (s'il en existe) tous les nombres qui vérifient cette égalité. Un tel nombre est dit **solution** de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et **racine** du trinôme $x^2 + bx + c$.

Propriété Le nombre de solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$, dépend du signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Signe de Δ	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Solutions de $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$	PAS DE SOLUTION	$x_0 = \frac{-b}{2a}$	$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
Forme factorisée	PAS DE FACTORISATION	$a(x - x_0)^2$	$a(x - x_1)(x - x_2)$

Démonstration admise

Exemples 1) $5x^2 - 10x - 5 = 0$

$\Delta = 10^2 - 4 \times 5 \times (-5) = 200 = (10\sqrt{2})^2 > 0$, $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions :
$x_1 = \dfrac{10 + 10\sqrt{2}}{10} = 1 + \sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{10 - 10\sqrt{2}}{10} = 1 - \sqrt{2}$.
On en déduit une factorisation de $P(x)$: $P(x) = 5(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$.

2) $3x^2 - 4x + 2 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \times 3 \times 2 = -8$, $\Delta < 0$ donc l'équation n'admet pas de solution.

3) Factorisation de $P(x) = x^2 - 4x\sqrt{3} + 12$
$\Delta = (4\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 12 = 0$ donc l'équation admet une unique solution : $x_0 = 2\sqrt{3}$.
On en déduit une factorisation de $P(x)$: $P(x) = (x - 2\sqrt{3})^2$.

III Signe d'un trinôme – Application à la résolution d'inéquations

3.1 Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$

Depuis la 2nde, vous savez étudier le signe d'un produit de facteurs (du 1er degré). Or, on a vu précédemment que f(x) pouvait se factoriser. D'où la propriété suivante :

<table>
<tr><th colspan="3">Propriété Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$</th></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$</td><td>$\Delta = 0$</td><td>$\Delta > 0$</td></tr>
<tr>
<td>$f(x)$ est du signe de a.
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>ax^2+bx+c</td><td>signe de a</td></tr></table>
</td>
<td>$f(x)$ est du signe de a (et nul en $x_0 = \frac{-b}{2a}$).
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>ax^2+bx+c</td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de a</td></tr></table>
</td>
<td>$f(x)$ est du signe de a sauf lorsque x est entre les racines x_1 et x_2, auquel cas $f(x)$ et a sont de signes contraires.
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>ax^2+bx+c</td><td>signe de a</td><td>0</td><td>$-$signe de a</td><td>0</td><td>signe de a</td></tr></table>
</td>
</tr>
</table>

3.2 Inéquations du second degré

Une inéquation du second degré à une inconnue x est une inéquation qui peut s'écrire sous l'une des formes suivantes :

$ax^2 + bx + c \leq 0$, $\quad ax^2 + bx + c \geq 0$, $\quad ax^2 + bx + c < 0$, $\quad ax^2 + bx + c > 0$

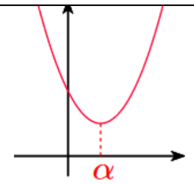
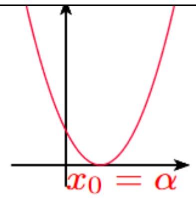
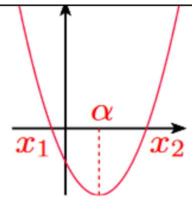
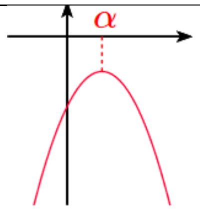
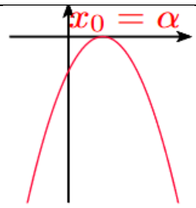
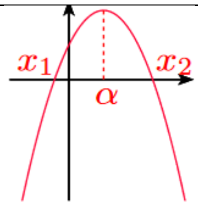
Exemples 1) $-x^2 + 3x - 4 \leq 0$

$\Delta = -7 < 0$ et $a = -1$.

2) $x^2 + 2x > 0$
$x^2 + 2x = x(x + 2)$. Les racines sont donc 0 et -2. Avec $a = 1$.

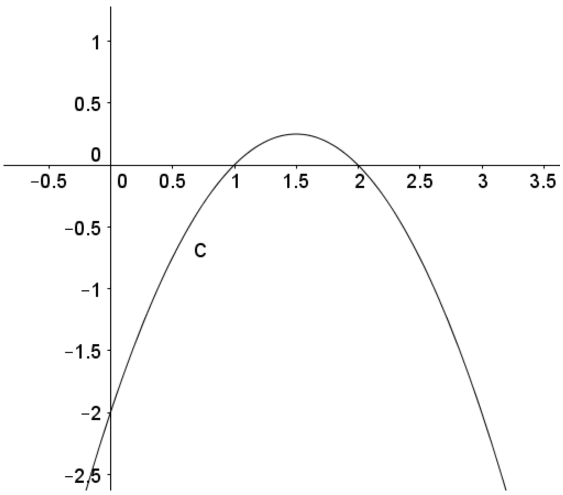
IV <u>Représentation graphique</u>

Propriété La représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c,\ (a \neq 0)$ est une <u>parabole</u> dont le sommet S a pour coordonnées (α, β) où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $= f(\alpha)$.
Cette parabole admet un axe de symétrie : la droite d'équation $x = \alpha$.

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$	
			$a > 0$
			$a < 0$

Remarque Le tracé de la parabole représentant une fonction f du second degré permet de (re)trouver les résultats précédents concernant les racines éventuelles de $f(x)$ et le signe de $f(x)$.

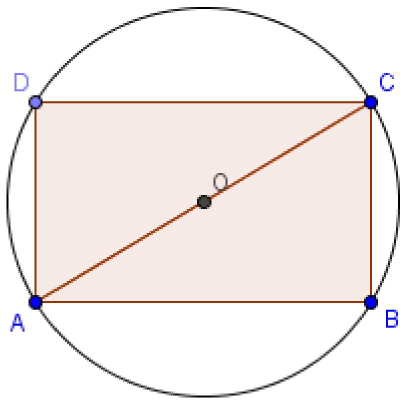
Exemple Soit la parabole d'équation $y = -x^2 + 3x - 2$



V Une application

Déterminer les dimensions d'un rectangle de périmètre 34 cm inscrit dans un cercle de diamètre 13 cm.

Un rectangle est un parallélogramme dans un cercle de diamètre l'une de ses diagonales.



Avec les données de l'énoncé, on a donc $\begin{cases} AB + BC = 17 \\ AC = 13 \end{cases}$. Comme le triangle ABC est rectangle en B, on a aussi $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Si l'on note $x = AB$, la dernière égalité conduit à $x^2 + (17 - x)^2 = 13^2$. Voilà, le problème est bien du second degré puisqu'il nous amène à résoudre une équation du second degré.

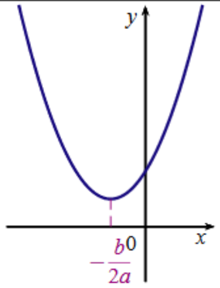
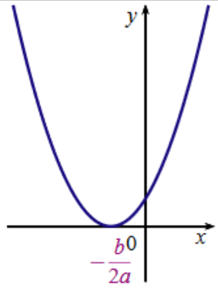
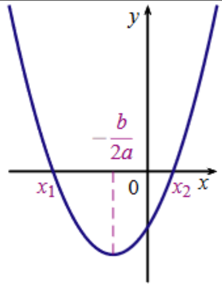
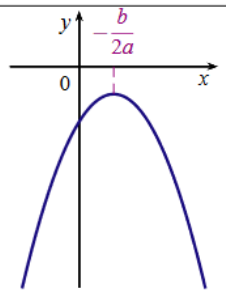
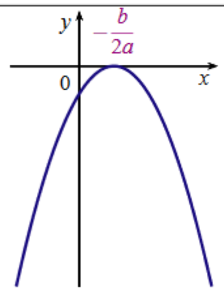
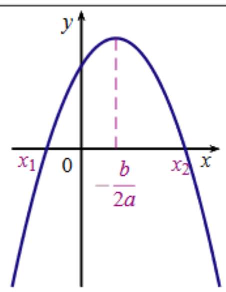
En développant cette équation, on obtient $2x^2 - 34x + 17^2 - 13^2 = 0$ soit $2x^2 - 34x + 120 = 0$.
Après simplification (par 2), on résout $x^2 - 17x + 60 = 0$: $\Delta = 17^2 - 4 \times 60 = 49$ d'où les valeurs possibles $x_1 = \frac{17+7}{2} = 12$ et $x_2 = \frac{17-7}{2} = 5$.

Si $x = AB = 12$ alors $BC = 17 - AB = 5$ et si $x = AB = 5$ alors $BC = 12$.

Les dimensions du rectangle cherché sont donc L=12 cm et l=5 cm.

RECAPITULATIF

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0$$

<table>
<tr><td colspan="2">Discriminant
$\Delta = b^2 - 4ac$</td><td>$\Delta < 0$</td><td>$\Delta = 0$</td><td>$\Delta > 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$a > 0$</td><td>Variations</td><td colspan="3">$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & -\frac{b}{2a} & & +\infty \\ \hline f(x) & & \searrow & f\left(-\frac{b}{2a}\right) & \nearrow & \end{array}$</td></tr>
<tr><td>Courbe</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Solutions de
$ax^2 + bx + c = 0$</td><td>Pas de solution</td><td>Une solution :
$x_0 = -\frac{b}{2a}$</td><td>Deux solutions :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td></tr>
<tr><td>Signe de
$ax^2 + bx + c$</td><td>Strictement positif sur
$\mathbb{R}$</td><td>Positif sur $\mathbb{R}$</td><td>Positif sur
$]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$
Négatif sur $[x_1; x_2]$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$a < 0$</td><td>Variations</td><td colspan="3">$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & -\frac{b}{2a} & & +\infty \\ \hline f(x) & & \nearrow & f\left(-\frac{b}{2a}\right) & \searrow & \end{array}$</td></tr>
<tr><td>Courbe</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Solutions de
$ax^2 + bx + c = 0$</td><td>Pas de solution</td><td>Une solution :
$x_0 = -\frac{b}{2a}$</td><td>Deux solutions :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td></tr>
<tr><td>Signe de
$ax^2 + bx + c$</td><td>Strictement négatif sur
$\mathbb{R}$</td><td>Négatif sur $\mathbb{R}$</td><td>Négatif sur
$]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$
Positif sur $[x_1; x_2]$</td></tr>
</table>