

## Introduction

Une des **applications essentielles** de l'étude de « fonction dérivée » pour nous sera **la recherche du sens de variation d'une fonction** qui va dépendre du signe de cette « fonction dérivée » que l'on verra au chapitre 9. L'enjeu de ce chapitre va donc être, dans un 1<sup>er</sup> temps, de développer les outils qui permettront d'obtenir facilement la fonction dérivée  $f'$ , telle que pour tout  $x$ ,  $f'(x)$  soit le coefficient directeur de la tangente à la courbe de  $f$  au point  $M(x, f(x))$ .

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  inclus dans  $\mathbb{R}$ .

## I Taux d'accroissement

**Définition** On appelle taux d'accroissement de  $f$  entre deux nombres  $a$  et  $b$  distincts le nombre :

C'est la définition suivante qui sera utilisée très souvent :

**Définition** On appelle taux d'accroissement de  $f$  entre deux nombres  $a$  et  $a + h$  (appartenant à  $I$ ), avec  $h \neq 0$  ; noté  $\tau_{a,h}$  :

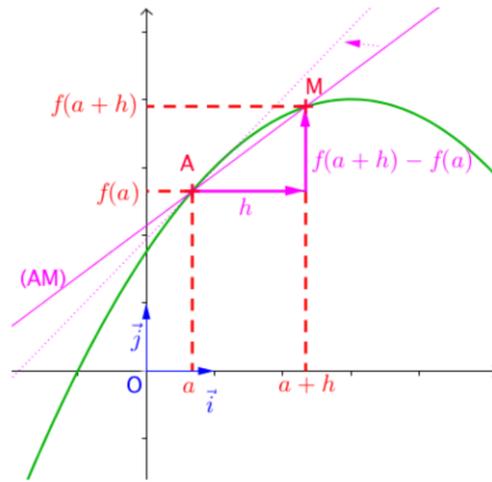
**Remarques** 1) Les deux définitions sont équivalentes (vérifiez-le !).

2) Quand  $h = 0$ , le taux d'accroissement n'existe pas.

**Exemple** Soit  $f(x) = x^2$ , calculons le taux d'accroissement entre 1 et  $1 + h$  :

$\tau_{1,h} =$

**Interprétation graphique** A et M sont les points de la courbe représentative d'une fonction  $f$  d'abscisses respectives  $a$  et  $a + h$ . Le taux d'accroissement de  $f$  entre  $a$  et  $a + h$ ,  $\tau_{a,h}$ , est le coefficient directeur de la droite (AM), soit :



## II Nombre dérivé d'une fonction en un point

### 2.1 Introduction à la limite d'une fonction sur deux exemples

**Exemple 1** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{0\}$  par  $f(x) = \frac{(x+1)^2 - 1}{x}$ .

L'image de 0 par la fonction  $f$  n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de  $f(x)$  lorsque  $x$  se rapproche de 0.

	➔					➔			
$x$	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	...	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

On constate que  $f(x)$  se rapproche de 2 lorsque  $x$  se rapproche de 0. On dit que la limite de  $f$  lorsque  $x$  tend vers 0 est égale à 2 et on note :

**Exemple 2** Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R} - \{0\}$  par  $g(x) = \frac{1}{x^2}$

A l'aide de la calculatrice, on constate que  $g(x)$  devient de plus en plus grand lorsque  $x$  se rapproche de  $+\infty$ . On dit que la limite de  $g$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  est égale à 0 et on note :

### 2.2 Définition

**Définition** Soit  $a$  et  $(a + h)$  appartenant à  $I$ . Dire que  $f$  est dérivable en  $a$  signifie que le taux d'accroissement entre  $a$  et  $a + h$ ,  $\tau_{a,h}$ ,

**Exemple 1** Soit  $(x) = x^2 + 2x - 3$  et  $a = 2$

La méthode est la suivante : on calcule d'abord le taux d'accroissement  $\tau_{a,h}$  puis on passe à la limite. Si cette limite est un nombre  $L$  alors cette fonction est dérivable en  $a$  et  $L = f'(a)$ .

**Exemple 2** Soit  $g(x) = |x - 5|$  et  $a = 5$

### **2.3 Complément : les vitesses**

Supposons qu'un objet se déplace en ligne droite selon une équation du mouvement  $s = f(t)$ , où  $s$  est le déplacement (distance orientée) de l'objet depuis le moment choisi comme origine du temps jusqu'au temps  $t$ . On appelle fonction de position la fonction  $f$  qui décrit le mouvement de l'objet. Durant l'intervalle de temps  $t = a$  jusqu'à  $t = a + h$ , le changement de position de l'objet est donné par  $f(a + h) - f(a)$ . La vitesse moyenne de l'objet sur cet intervalle de temps est calculée par :

$$\text{vitesse moyenne} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps}} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

qui donne également la pente de la droite (AM) (voir partie I).

Supposons maintenant que nous calculions les vitesses moyennes sur des intervalles de temps  $[a; a + h]$  de plus en plus courts. Autrement dit, nous faisons tendre  $h$  vers 0. Nous définissons dans ce cas-là, la vitesse instantanée  $v(a)$  au moment  $t = a$  comme la limite de ces vitesses moyennes :

$$v(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Ce qui signifie que la vitesse instantanée au moment  $t = a$  est égale à la pente de la tangente en A (voir figure partie I).

### Exercice Vitesse d'une balle qui tombe

Supposons qu'une balle soit lâchée du haut de la tour Eiffel, à 300 m au-dessus du niveau du sol. On admet que si  $s(t)$  désigne la distance de chute (en m) après  $t$  secondes alors  $s(t) = 4,9t^2$  (d'après la loi de Galilée qui dit que « la distance parcourue par un corps qui tombe librement est proportionnelle au carré du temps (il est fait abstraction de la résistance de l'air).

a) Quelle est la vitesse de la balle 5 secondes plus tard ?

b) Quelle est sa vitesse au moment de son impact ?

### III Tangente à la courbe représentative d'une fonction

#### **Définition** *Tangente à une courbe*

On appelle tangente à une courbe  $C$  en un point  $A$ , appartenant à  $C$ , une droite passant par  $A$  et qui, si elle existe, est aux alentours de  $A$  la droite la plus proche de  $C$ .

Soit  $C$  la courbe représentative de la fonction  $f$  et  $A(a ; f(a))$  et  $M(a + h ; f(a + h))$ , deux points de cette courbe.

On a vu que le coefficient directeur de la droite (AM) (sécante à la courbe) est la quantité  $\tau_{a,h}$ .

Lorsque  $h$  tend vers 0, la droite (AM) tend vers la tangente à la courbe au point  $A$  et le nombre  $\tau_{a,h}$  tend vers le coefficient directeur de la tangente en  $A$ .

On a donc la propriété suivante :

**Propriété** Soit  $f$  dérivable en  $a \in I$  et  $C$  la courbe représentative de  $f$ .

(i) Le nombre dérivé  $f'(a)$  est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse  $a$ .

(ii) L'équation de la tangente au point  $A(a ; f(a))$  est la suivante :  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

*Démonstration* (i) admis

(ii) En exercice

**Remarque** Le point  $A$  appartient à la fois à la courbe de  $f$  et à la tangente. On dit que  $c$ 'est le point de contact en au point d'abscisse  $a$ .

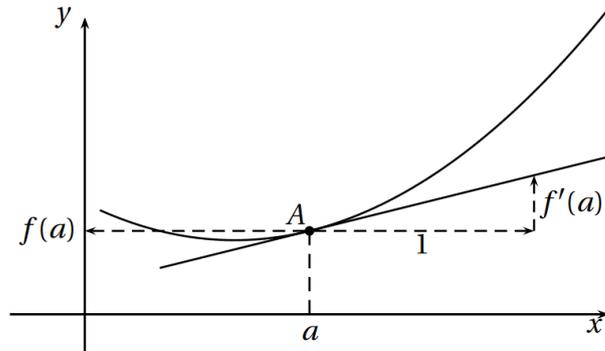


Figure : Interprétation graphique du nombre dérivé

**Exemple** Soit  $f(x) = x^2 + 2x - 3$  et  $A(2 ; f(2))$

#### IV Fonction dérivée d'une fonction $f$

Appelons  $C$  la courbe représentative de la fonction  $f$ .

##### 4.1 Définition

**Un exemple pour comprendre**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^2$ .

Calculons le nombre dérivé de la fonction  $f$  en un nombre réel quelconque  $a$  :

Pour tout nombre  $a$ , on associe le nombre dérivé de la fonction  $f$  égal à  
 On a donc défini sur  $\mathbb{R}$  une fonction, notée  $f'$  dont l'expression est  
 Cette fonction s'appelle la fonction dérivée de  $f$ .

**Définition** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .  
 On dit que  $f$  est sur  $I$  si elle est dérivable en tout réel  $x$  de  $I$ .  
 Dans ce cas, la fonction qui à tout réel  $x$  de  $I$  associe le nombre dérivé de  $f$  en  $x$  est

**Remarque** Le réel  $f'(x)$  est

## ***Un peu d'histoire des maths***

Le mot « dérivé » a été introduit par le mathématicien franco-italien Joseph Louis Lagrange (1736-1813) pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de « provenir ») d'une autre fonction.

### **4.2 Fonctions dérivées des fonctions de référence**

1. Fonction affine – *en exercice*
2. Fonction carré – *déjà fait*
3. Fonction puissance (*admis*)
4. Fonction inverse

5. Fonction racine carrée - *en exercice*

**Bilan – A connaître par cœur !**

### *Histoire des mathématiques*

#### **A. Calcul infinitésimal**

De nombreuses spécialités scientifiques étudient les objets en mouvement et leur changement au cours du temps. Par exemple, lorsqu'une balle dévale une pente, sa position change. La vitesse de la balle est le taux du changement de sa position. Bien sûr, cela peut se modifier. On appelle accélération le taux du changement de la vitesse. La question est la suivante : si vous avez une formule mathématique décrivant la position de la balle, pouvez-vous calculer sa vitesse et son accélération ? Le problème géométrique démarre avec une ligne courbe sur le plan et détermine comment est l'inclinaison en tout point donné. Si la courbe est un graphique de la position de la balle contre le temps, alors sa pente représente la vitesse de la balle. Ceci avait été compris dès l'époque d'Archimède, mais on ne connaissait alors que des méthodes approximatives pour la calculer. A la fin du XVII<sup>ème</sup> siècle, Isaac Newton et Gottfried Leibniz développèrent chacun de leur côté le calcul infinitésimal, un ensemble magnifique de règles décrivant la pente des graphiques et les idées qui y sont reliées. Ce sujet se divisait en deux branches. En partant d'une courbe, un calcul infinitésimal différentiel vous donnera la sa pente. Un calcul infinitésimal intégral décrit la zone bloquée au-dessous d'elle (ce que vous verrez l'année prochaine). Cependant, il s'agit de deux procédés opposés.

#### **B. Biographie de Gottfried Leibniz**



Né le 1<sup>er</sup> juillet 1644 à Leipzig et mort le 14 novembre 1716 à Hanovre.

Il est le fils d'un professeur de philosophie morale de l'université de Leipzig. Dès l'âge de 6 ans, il campe dans la bibliothèque paternelle et devient un lecteur assidu. Il entre à 15 ans l'université, où il étudie la philosophie, la théologie et de droit. Il ne fait pas de mathématiques si l'on excepte sa découverte de l'œuvre d'Euclide lors d'un bref passage à l'université de Jena. Une fois son doctorat de droit en poche, Leibniz se met au service de l'électeur de Mayence, puis du prince de Hanovre, dans un poste de nature diplomatique. On l'envoie en mission en France, et se lie d'amitié avec Huygens. Il approfondit son étude des mathématiques. En 1673, lors d'un voyage à Londres, il rencontre des mathématiciens anglais et il est admis à la Royal Society. Newton l'accusera plus tard d'avoir lu son manuscrit sur la découverte du calcul différentiel, et une grande querelle de préséance surgira bientôt entre les deux hommes. Leibniz se rend aussi à La Haye, où il rencontre Spinoza, et à Delft, où il fait la connaissance de Leeuwenhoek. En 1676, il doit rentrer en Allemagne. Il fonde en 1682 la revue *Acta Eruditorum* qui lui permet de diffuser ses découvertes, mais aussi ses notations, et de rester en contact avec les frères Bernoulli. En 1700, il fonde l'Académie de Berlin dont il devient le 1<sup>er</sup> président. La fin de sa vie est assombrie par sa querelle avec Newton et sa relative disgrâce auprès des souverains de Hanovre.

Il meurt dans la solitude et son secrétaire, seul, assistera à ses funérailles.

De nombreuses idées de Leibniz préfigurent la théorie de la pensée moderne en physique, technologie, biologie, médecine, géologie, psychologie, linguistique, politique, loi, théologie, histoire, philosophie et mathématiques. Il améliora la machine à calculer de Pascal, développa la théorie binaire qui était la technologie numérique moderne, développa ce que nous connaissons sous le nom d’algèbre de Boole et la logique symbolique. Désirant être abordable, il est le plus grand créateur de notations. Il introduit le  $d$ , abréviation de différence, pour la différentiation, ainsi que la notation  $\frac{df}{da} (= f'(a))$ , le symbole  $\int$  –c’est le  $s$  de l’époque, première lettre du mot latin *summa* (somme), pour l’intégration. Il utilise systématiquement le point pour la multiplication et les deux points ( : ) pour la division. C’est grâce à lui et à Newton que le signe  $=$  se généralise. Il est, de plus, le premier à utiliser le terme de *fonction*.

#### Œuvres

- *Dissertatio de arte combinatoria* (1666)
- *Essais de théodicée* (1710)

### C. Biographie de Isaac Newton



Né en 1642 à Woolsthorpe et mort en 1727 à Kensington.

Isaac Newton, enfant chétif, distrait en classe, fait partie des élèves médiocres de l’école de Grantham. Il s’intéresse à la mécanique, écrit des vers et dessine. Par la suite, ses aptitudes se révèlent et on l’envoie en 1660 au Trinity College de Cambridge, où il obtient son diplôme en 1664. Une épidémie de peste oblige le collège à fermer et Newton se réfugie à Woolsthorpe. Les deux années qui suivent sont les plus fécondes de sa production mathématique, mais elle restera manuscrite. Lorsqu’il pourra la faire publier, la qualité de ses découvertes étant reconnue, il se passionnera pour l’alchimie. En 1669, son maître Barrow lui cède sa chaire de mathématiques à Cambridge. Ses travaux scientifiques concernent alors principalement la physique : l’optique, et surtout la théorie de la gravitation. Halley, impressionné par l’importance de ses découvertes, le pousse à les publier. Newton se met alors à la tâche et fait paraître ses *Principia*. Le monde scientifique se rend vite compte de l’importance de cette œuvre. La réputation de Newton est faite : il est comblé d’honneurs.

La fin de sa vie est improductive au niveau scientifique. Atteint d’une dépression nerveuse en 1693, il quitte Cambridge. En 1703, il devient président de la Royal Society, poste qu’il conservera jusqu’à sa mort. Il est anobli par la reine Anne en 1705. Newton est considéré comme le fondateur, avec Leibniz du calcul différentiel et intégral. Ses travaux portent aussi sur les fonctions et sur les courbes. Il se passionne pour la théologie, et polémique pour établir la prééminence de ses travaux sur ceux de Leibniz. Il paraît maintenant certain que les œuvres des deux hommes ont été conçues indépendamment, celle de Newton précédant d’une dizaine d’années celle de Leibniz, mais ce dernier en donne une formulation plus explicite et mieux exploitable. Malheureusement, cette querelle divise le continent et l’Angleterre, où les mathématiques vont stagner un siècle durant. Newton note les dérivées par un point situé au-dessus ( $\dot{x}$ ). Son œuvre en physique est fondamentale : découverte de la nature de la lumière blanche, de la gravitation universelle.

#### Œuvres

- Enumeratio curvarum trium dimensionum* (1667, non publié)
- De methodis serierum et fluxionem* (1671, non publié)
- De analysi* (1669, non publié)
- Philosophiæ naturalibus Principia mathematica* (1687)
- Opticks* (1704)
- Arithmetica universalis sive de compositione et resolutione* (1707)
- The chronology of Ancient Kingdoms Amended* (1728)
- Observations upon the Proheticies of Daniel and the Apocalypse of St John* (1733)

#### Formule du binôme de Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$