Lycée militaire de Saint-Cyr **Problèmes sur la dérivation** **$1^{ère}$S**

Exercice 1

Partie A

Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x) = \frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$.
Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de φ soit tangente au point de coordonnées (0 ; 3) à la droite T d'équation y = 4x + 3.

Partie B

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$ et (C sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que pour tout réel x, on a $f(x) = \alpha + \frac{\beta x}{x^2+1}$, α et β étant deux réels à déterminer.
2. Etudier les variations de f.
3. Déterminer l'équation de la droite (T) tangente à la courbe C au point d'abscisse 0. Etudier la position relative de C par rapport à T.
5. Construire C et T.

Exercice 2

Soit f la fonction trinôme telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.
1. Déterminer a , b et c tels que sa courbe C_f admette au point A (1 ; 3) une tangente de coefficient directeur égal à 1 ainsi qu'une tangente horizontal au point d'abscisse ½.
2. Etudier les variations de f.

Exercice 3

1. On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
a) Vérifier que $P(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 2)$.
b) Etudier le signe de P(x).
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \frac{x^3-3x+2}{x-2}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (en abscisse : 1 cm pour 1 unité, en ordonnée : 1 cm pour 2 unités)
a) Montrer que $f'(x) = \frac{2P(x)}{(x-2)^2}$.
b) Etudier les variations de f.
3. a) Pour quelle abscisse a la tangente d'abscisse a est-elle horizontale ? *Justifier*
b) Déterminer l'équation de la tangente T à C en x=0 et la tracer.
c) Tracer C.
4. a) Trouver a , b , c et d tels que, pour tout réel x différent de 2, $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x-2}$.
b) On appelle g la fonction définie par $g(x) = x^2 + 2x + 1$ et P sa courbe représentative.
Etudier les positions relatives de C et P.
c) Tracer P. Que dire sur les relations entre P et C lorsque x devient grand ?

Exercice 4

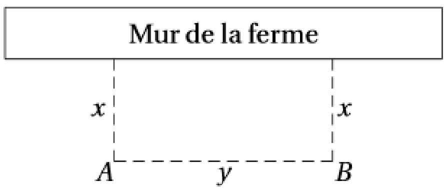
On considère un rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm.

1. Déterminer ses dimensions (Longueur L et largeur l) sachant que son aire S est égale à $\frac{3}{4}$ cm^2
2. On recherche maintenant les dimensions du rectangle de façon que son aire S soit maximale.
   (a) Exprimer S en fonction de l
   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$.
   Calculer la dérivée f' et étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f. Tracer sa représentation graphique $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0;2]$.
   (c) En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm et l'aire S est maximale.

Exercice 5

Un fermier décide de réaliser un poulailler (de forme rectangulaire) le long du mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de 392 m^2. Où doit-on placer les piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale ?
La figure ci-dessous représente le poulailler accolé à la ferme en *vue de dessus*. On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distace entre les deux piquets A et B. (On a donc $x > 0$ et $y > 0$).

1. Sachant que l'aire du poulailler est de 392 m^2, exprimer y en fonction de x.
2. Démontrer que la longueur $l(x)$ du grillage est : $l(x) = \frac{2x^2+392}{x}$
3. Calculer la dérivée l' de l. en déduire le tableau des variations de l.
4. En déduire les dimensions x et y pour lesquelle la clôture a une longueur minimale. Préciser cette longueur.



Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c$$

où a, b et c sont des nombres réels quelconques tels que $a \neq 0$.
Démontrer que, dans un repère, la courbe représentative de la fonction f admet deux tangentes horizontales si et seulement si b est non nul.