Histoire des mathématiques

Les jeux étaient très courants dans les cours royales du XVIIème siècle et de nombreux mathématiciens se sont intéressés aux probabilités de gains (Fermat, Pascal, Galilée…). Jacques Bernoulli (1654-1705) a travaillé sur la loi des grands nombres : lorsque n est grand, la fréquence observée est proche de la probabilité. Par ailleurs, il a donné son nom au schéma de Bernoulli.
L'arrivée des premiers ordinateurs a permis de réaliser des simulations aléatoires, seul moyen d'étudier certains problèmes dont on ne peut pas déterminer la solution.
Pour sa contribution à l'étude des marches aléatoires, le mathématicien français Wendlin Werner est devenu le premier probabiliste à recevoir en 2006 la médaille Fields, équivalent du prix Nobel pour les mathématiciens.
Actuellement, les statistiques et les probabilités sont utilisées partout : recensement de population, traitement de données, prévisions, sondages… La simulation permet d'observer des phénomènes comme la fluctuation d'échantillonnage, vue en seconde, mais aussi de prévoir de nombreux phénomènes : financiers, météorologiques…

I Tableaux croisés d'effectifs

1.1 Définition

Définitions (i) Soit deux variables A et B étudiées sur un même ensemble E d'individus. On peut croiser ces deux variables dans un tableau d'effectifs, à deux entrées.
(ii) Card(A) est le nombre d'individus ayant le caractère A.
(iii) La fréquence dans l'ensemble E du caractère A est $f(A) = \frac{Card(A)}{Card(E)}$.

Exemple Intéressons nous à deux caractères d'une population : le nombre d'admis au BAC général en fonction du sexe du candidat.

	Admis	Recalés	Total
Garçons	317 779	47 905	365 684
Filles	346 187	27 262	373 449
Total	663 966	75 167	739 133

346 187 filles ont obtenu le BAC général.
Les deux colonne et ligne nommés « Total » sont appelées les marges du tableau.

1.2 Fréquences marginales et conditionnelles

Définitions
(i) En divisant chaque case du tableau par l'effectif total, on obtient ainsi dans les marges les fréquences dites marginales.
(ii) En divisant l'effectif de chaque case par l'effectif total de la ligne (ou de la colonne) correspondante, on obtient les fréquences conditionnelles.

Exemples 1) Fréquences marginales

	A (Admis)	R (Recalés)	Total
G (Garçons)	0,4299	0,0648	0,4947
F (Filles)	0,4684	0,0369	0,5053
Total	0,8983	0,1017	1

La proportion des élèves qui sont des garçons et qui ont eu le BAC général est 0,4299 ou 42,99 %. On note cette fréquence $f(G \cap A)$.

2) Fréquences conditionnelles par ligne

	Admis	Recalés	Total
Garçons	$\frac{317\,779}{365\,684} \approx 0{,}8690$	$\frac{47\,905}{365\,684} \approx 0{,}1310$	1
Filles	$\frac{346\,187}{373\,449} \approx 0{,}9270$	$\frac{27\,262}{373\,449} \approx 0{,}0730$	1

L'ensemble de référence pour le calcul des fréquences n'est plus celui de la population totale : ce sera successivement l'ensemble des garçons puis celui des filles et enfin la population totale. Parmi les filles, la fréquence de filles ayant le BAC général est 0,9270. On note cette fréquence $f_F(A)$. Et on a : $f_F(A) = \frac{card(A \cap F)}{card(F)}$.

3) Fréquences conditionnelles par colonnes

	Admis	Recalés
Garçons	$\frac{317\,779}{663\,966} \approx 0{,}4786$	$\frac{47\,905}{75\,167} \approx 0{,}6373$
Filles	$\frac{346\,187}{663\,966} \approx 0{,}5214$	$\frac{27\,262}{75\,167} \approx 0{,}3627$
Total	1	1

Parmi les recalés, il y a 63,73 % de garçons. On peut dire aussi que la part de garçons parmi les recalés est égal à 0,6373. On note cette fréquence $f_F(A)$. Et on a : $f_R(G) = \frac{card(G \cap R)}{card(R)} = 0{,}6373$.

II Probabilités conditionnelles

2.1 Introduction

De nombreuse situations se résument à des phrases de la forme « si … a lieu, alors la probabilité de … est … ».

Exemples 1) Si je lance une pièce de monnaie (non truquée) 10 fois et qu'elle tombe sur pile, alors au 11ème lancer la probabilité d'obtenir pile est égale à …

2) On lance deux dés. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme supérieure à 8, sachant que l'un des deux dés donne 4 ?

Un peu d'histoire des maths

C'est le mathématicien français Abraham de Moivre (1667-1754) qui avance le premier le concept de probabilité conditionnelle dans son livre *The doctrine of chances* (1718).

2.2 Définition

Définition A et B étant deux événements tels que $Card(A) \neq 0$. La probabilité de B sachant que A est réalisé, notée $P_A(B)$, est définie par :

$$P_A(B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)}$$

Remarque Si $Card(B) \neq 0$, on a aussi $P_B(A) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(B)}$.

Exemple Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur 800 patients atteints d'une maladie. Certains sont traités avec le médicament A, d'autres avec le médicament B. Le tableau ci-dessous présente les résultats de l'étude :

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

Soit l'événement A : « Le patient a pris le médicament A ».

Soit l'événement G : « Le patient est guéri ».

- La probabilité que le patient ait pris le médicament A sachant qu'il est guéri est :
  $P_G(A) = \frac{Card(A \cap G)}{Card(G)} = \frac{383}{674} \approx 0{,}57.$

- La probabilité que le patient soit guéri sachant qu'il a pris le médicament B :
  $P_{\bar{A}}(G) = \frac{Card(\bar{A} \cap G)}{Card(\bar{A})} = \frac{291}{345} \approx 0{,}84.$