Chapitre 10 **PRIMITIVES** **1re STI2D - Spé**

I Primitives d'une fonction sur un intervalle

1.1 Notion de primitive

Définition Soit la fonction f définie sur l'intervalle I. F est une **primitive** de f sur I si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- F est définie et dérivable sur I.
- $\forall\, x \in I, F'(x) = f(x)$.

Exemple Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$.
La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3 + x^2 - x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $F'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = f(x)$.

Retenir le schéma important suivant :

$$\text{F} \xrightarrow{\text{a pour dérivée}} f$$

$$\text{F} \xleftarrow[\text{a pour primitive}]{} f$$

Remarques 1) On peut dire que déterminer une primitive d'une fonction est l'opération « inverse » de la détermination de la dérivée de cette même fonction.
2) Il existe un théorème qui affirme que toute fonction dérivable sur un intervalle I admet des primitives sur I. Toutes les fonctions de référence rencontrées cette année admettent donc des primitives sur les intervalles de leur ensemble de dérivabilité.

1.2 Deux théorèmes

Théorème 1 Soit G et F deux primitives de f sur I, alors il existe un réel c tel que pour tout réel x de I, $G(x) = F(x) + c$.

Démonstration admise

Remarque Dès lors qu'une fonction f admet une primitive F sur I, alors elle admet une *infinité de primitives* sur I, qui diffèrent d'une constante.

Exemple Si on reprend l'exemple précédent alors on a $G_1(x) = x^3 + x^2 - x + 2$ et $G_2(x) = x^3 + x^2 - x - \frac{1}{2}$ qui sont toutes deux des primitives de f.

Théorème 2 Si f possède une primitive F sur l'intervalle I, alors f possède **une unique primitive** sur I prenant la valeur y_0 en un réel x_0 de I (c'est-à-dire $F(x_0) = y_0$).

Démonstration admise

Exemple Déterminons la primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{2}{t^2} + 1$ prenant la valeur 0 en 1.
Une primitive F de f est donnée par $F(t) = -\frac{2}{t} + t + c$, où c est une constante réelle (vérifiez-le en exercice !).

On cherche donc la valeur de c telle que $F(1) = 0$. Soit $-\frac{2}{1} + 1 + c = 0 \Leftrightarrow -1 + c = 0 \Leftrightarrow c = 1$.
La primitive cherchée est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = -\frac{2}{t} + t + 1$.

II <u>Primitives de fonctions de référence</u>

Tableau à connaître par

f est une fonction définie sur un intervalle I, F est une primitive de f sur I.

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{F(x)}$	$\boldsymbol{I}$
$a, a \in \mathbb{R}$	ax	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$
x^2	$\frac{1}{3}x^3$	$\mathbb{R}$
$ax^n, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$A\sin(\omega x + \varphi), \omega \neq 0$ $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$	$-\frac{A}{\omega}\cos(\omega x + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$A\cos(\omega x + \varphi), \omega \neq 0$ $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$	$\frac{A}{\omega}\sin(\omega x + \varphi)$	$\mathbb{R}$

Exemples 1) Soit $f(x) = \frac{1}{2}$, alors $F(x) = \frac{1}{2}x$ est une primitive de f.
2) Soit $g(x) = 3x^5$, alors $G(x) = \frac{3}{6}x^6 = \frac{1}{2}x^6$ est une primitive de g.
3) Soit $h(t) = 2\sin(2t - \frac{\pi}{6})$, alors $H(t) = -\frac{2}{2}\cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)$ est une primitive de h.

III <u>Opérations sur les primitives</u>

Propriétés Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et k une constante réelle.

(i) Si F est une primitive de f sur I, alors kF est une primitive de kf sur I.
(ii) Si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.

Remarque importante Nous en déduisons que pour obtenir une primitive d'une fonction polynôme, il suffit de trouver une primitive de chacun des termes du polynôme.

Exemple Soit $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2$. Alors, une primitive de f est $F(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + 2x + c$ où c est un réel.

Attention Une primitive d'un produit de deux fonctions f et g n'est pas le produit des primitives de ces deux fonctions.

Exercice d'application n°1

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f.

a) $f(x) = x^4$ b) $f(x) = 4x^3$ c) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$
d) $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 2x - 6$ e) $f(t) = 5\cos(2t - \pi)$ f) $f(t) = -3\sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$

Corrigé

a) $f(x) = x^4$ donc $F(x) = \frac{1}{4+1}x^{4+1} = \frac{1}{5}x^5$

b) $f(x) = 4x^3$ donc $F(x) = 4\frac{1}{3+1}x^{3+1} = 4\frac{1}{4}x^4 = x^4$

c) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ donc $F(x) = \frac{1}{4+1}x^{4+1} + 2\frac{1}{2+1}x^{2+1} + 1x = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + 1$

d) $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 2x - 6$ donc :

$F(x) = 5\frac{1}{4}x^4 - 2\frac{1}{3}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 - 6x = \frac{5}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 6x$

e) $f(t) = 5\cos(2t - \pi)$ donc $F(t) = \frac{5}{2}\sin(2t + \pi)$ car cos $\rightarrow$ sin

f) $f(t) = -3\sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ donc $F(t) = -\frac{-3}{5}\cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ car sin $\rightarrow$ -cos

et donc $F(t) = \frac{3}{5}\cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice d'application n°2

Déterminer la primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f vérifiant la condition donnée :

$f(x) = x^5 - 3x + 1$ et $F(-3) = -2$.

Corrigé

Tout d'abord, une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est $F(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{3}{2}x^2 + x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Or, $F(-3) = -2$ c'est-à-dire :

$$-2 = \frac{(-3)^6}{6} - \frac{3}{2}(-3)^2 - 3 + c \Leftrightarrow -2 = 105 + c \Leftrightarrow c = 107.$$

On en déduit donc la primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{3}{2}x^2 + x + 107$.