Exercices de synthèse

Les exercices suivants sont regroupés par thème (Analyse, Probabilités – Statistiques, Divers). Ils sont faits pour vous entraîner une fois que le cours est parfaitement su. Pour la plupart, ce sont des exercices issus du BAC et de concours post-BAC.

I <u>Exercices d'analyse</u>

<u>Exercice 1</u> *D'après Bac 2017, Liban*

Les deux parties sont indépendantes

Partie A : L'accord de Kyoto (1997)

Le principal gaz à effet de serre (GES) est le dioxyde de carbone, note CO_2. En 2011, la France a émis 486 mégatonnes de GES en équivalent CO_2 contre 559 mégatonnes en 1990.

1. Dans l'accord de Kyoto, la France s'est engagée à réduire ses GES de 8 % entre 1990 et 2012. Peut-on dire qu'en 2011 la France respectait déjà cet engagement ? *Justifier la réponse.*
2. Sachant que les émissions de 2011 ont marqué une baisse de 5,6 % par rapport à 2010, calculer le nombre de mégatonnes en équivalent CO_2 émises par la France en 2010. Arrondir le résultat à 0,1.

Partie B : Etude des émissions de gaz à effet de serre d'une zone industrielle

Un plan de réduction des émissions de GES a été mis en place dans une zone industrielle. On estime que, pour les entreprises déjà installées sur le site, les mesures de ce plan conduisent à une réduction des émissions de 2 % d'une année sur l'autre et que, chaque année, les implantations de nouvelles entreprises sur le site génèrent 200 tonnes de GES en équivalent CO_2.
En 2005, cette zone industrielle a émis 41 milliers de tonnes de CO_2 au total.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de milliers de tonnes de CO_2 émis dans cette zone industrielle au cours de l'année $2005+n$.

1. Déterminer u_0 et u_1.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}98 \times u_n + 0{,}2$.
3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 10$.

   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,98. Préciser son 1er terme.

   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 31 \times 0{,}98^n + 10$.
4. a) Déterminer la limite de (u_n).

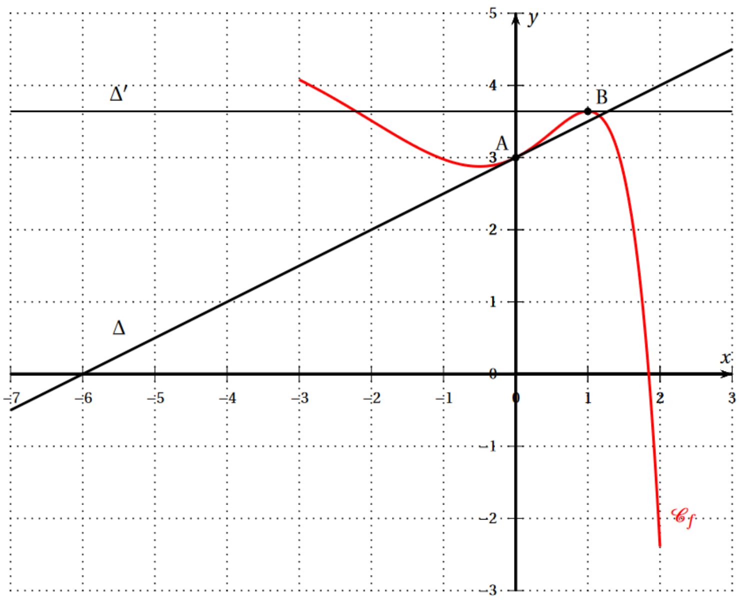
   b) Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. À l'aide de l'algorithme ci-dessous, on se propose de déterminer l'année à partir de laquelle la zone industrielle aura réduit au moins de moitié ses émissions de CO_2, par rapport à l'année 2005.
   a) Compléter les lignes 7 et 9 de l'algorithme.
   b) L'algorithme affiche 54. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```
Variables
    U est du type nombre
    n est du type nombre entier
Début Algorithme
    U prend la valeur 41
    n prend la valeur 0
    Tant que (......) faire
        Début Tant que
        U prend la valeur ...
        n prend la valeur n + 1
        Fin Tant que
    Afficher n
Fin Algorithme
```

Exercice 2 *D'après un sujet de BAC 2017, Asie*

Partie A

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3;2]$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Le point A de coordonnées $(0;3)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$. B est le point d'abscisse 1 appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$.



On dispose des informations suivantes :

- La fonction f est strictement décroissante sur les intervalles $[-3;-0,5]$ et $[1;2]$ et elle est strictement croissante sur $[-0,5;1]$;
- la droite Δ d'équation $y = 0,5x + 3$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A ;
- la tangente Δ' à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

Chaque réponse devra être justifiée.

1. Donner la valeur de $f'(1)$.

2. Quel est le signe de $f'(-2)$?
3. Donner la valeur de $f'(0)$.
4. Le point A est-il un point d'inflexion à la courbe $\mathcal{C}$?
5. Déterminer un encadrement par deux entiers consécutifs de $\int_0^1 f(x)dx$.

Partie B

On admet qu'il existe trois réels a,b et c pour lesquels la fonction f représentée dans la **partie A** est définie, pour tout réel x de $[-3;2]$ par: $f(x)=(ax^2+bx+c)e^x+5$.

1. En utilisant l'un des points du graphique, justifier que $c=-2$.
2. On admet que la fonction dérivée f' est donnée, pour tout réel x de $[-3;2]$ par: $f'(x)=(ax^2+(2a+b)x-2+b)e^x$.
   En utilisant les résultats de la **partie A**, justifier que $b=2,5$ puis que $a=-1$.

Partie C

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de $[-3;2]$ par: $f(x)=(-x^2+2,5x-2)e^x+5$.

1. Vérifier que pour tout réel x de $[-3;2]$ par: $f'(x)=(-x^2+0,5x+0,5)e^x$.
2. Etudier le signe de f' puis dresser le tableau de variation de f sur $[-3;2]$.
3. a) Justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $[-1;2]$.
   b) Donner la valeur de α arrondie au centième.

<u>**Exercice 3**</u> *D'après un sujet de concours*

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement la réponse.

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_0=8$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1}=\frac{3}{5}u_n+2$.
   La suite (u_n) est croissante.
2. On considère la suite géométrique (u_n) de 1er terme $u_0=-1$ et de raison $\frac{4}{5}$, et on pose :

   $$S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n, \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

   La suite (S_n) a pour limite 5 quand n tend vers l'infini.
3. Soit b un nombre réel et soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = x^2 + bx + 4.$$

Le minimum de la fonction f est inférieur ou égal à 4.

4. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_{n+1} = u_n + 1 \\ v_n = e^{-u_n} \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

La suite (v_n) est convergente.

5. L'équation $e^x - 2e^{-x} = -1$ admet deux solutions réelles.
6. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} - x + 4$.
   f admet un maximum sur $\mathbb{R}$.
7. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+3)e^{-x}$.
   La tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y = -3x$.
8. L'équation $\ln(x) + \ln(x+1) = \ln(2)$ admet le réel 1 pour unique solution.
9. La courbe représentative de la fonction logarithme népérien, notée ln, est toujours en-dessous de sa tangente en 1.
10. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 1)\ln x$.
    La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est horizontale.

<u>Exercice 4</u> *D'après un sujet de concours*

Ceci est un QCM. Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte.

On considère une fonction f sur $]0\,;+\infty[$, dont on note $\mathcal{C}$ la représentation graphique dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et dont le tableau de variation est le suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		e		5		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	↘	$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	↗	3	↘	$e-2$	↗	2

On peut affirmer que :

1. L'équation $f(x)=0$ admet :

(a) 0 solution.

(b) 1 seule solution.

(c) Exactement 2 solutions.

(d) 3 solutions ou plus.

2. Le signe de $f(x)$

(a) est positif.

(b) est négatif.

(c) est à la fois positif et négatif.

(d) aucune des 3 réponses précédentes.

3. La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3 peut avoir pour équation :

(a) $y=2x+4$.

(b) $y=-x+5$.

(c) $y=-4$.

(d) $x=3$.

4. Le réel $I=\int_5^7 f(x)dx$ vérifie l'inégalité :

(a) $I\geq 6$.

(b) $1\leq I\leq 4$.

(c) $0\leq I\leq 1$.

(d) $4\leq I\leq 6$.

<u>Exercice 5</u> *D'après un sujet de concours*

Après l'administration d'un médicament par voie orale chez un patient, sa concentration plasmatique dans le sang en g/L, en fonction du temps peut être modélisée par la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$C(t)=3\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)$ où t est le temps exprimé en heures.

1. Calculer $C(0)$
2. Calculer la dérivée $C'(t)$ de $C(t)$.
3. Dresser le tableau complet de variation de c
4. Donner la valeur maximale de la concentration sous sa forme la plus simplifiée
5. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $C(t)=\frac{2}{3}$.
6. En déduire sur quelle période de temps la concentration du médicament est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.

<u>Exercice 6</u> *D'après un sujet de concours – hors programme*

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$, g la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par $g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$.

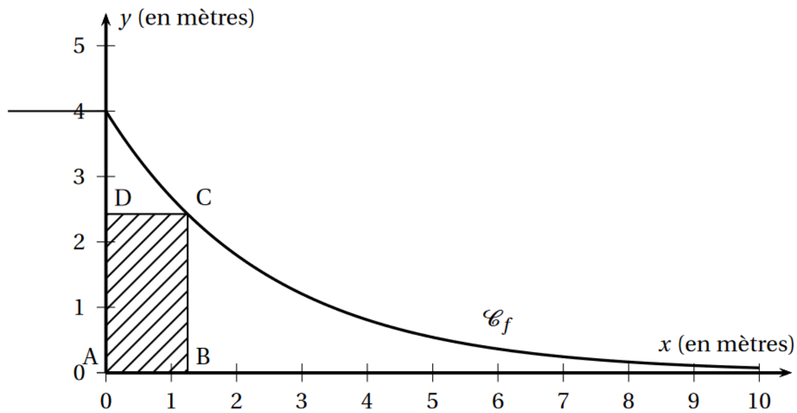
1. Montrer que $g'(x)=1+\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$. *Indication : utiliser la formule de dérivation suivante ;pour une fonction u ,* $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$.
2. Montrer que g n'admet pas un minimum en $x=e+1$.
3. On admet qu'il existe une unique solution α à l'équation $g(x)=0$ sur $]e+1\,;+\infty[$. Montrer que $f(\ln\sqrt{\alpha})=\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

<u>Exercice 7</u> *D'après BAC 2016, Polynésie*

Un publicitaire envisage la pose d'un panneau rectangulaire sous une partie de rampe de skateboard. Le profil de cette rampe est modélisé par la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ;10] par :

$$f(x)=4e^{-0,4x}.$$

Cette courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère d'origine O :



Le rectangle ABCD représente le panneau publicitaire et répond aux contraintes suivantes : le point A est situé à l'origine du repère, le point B est sur l'axe des abscisses, le point D est sur l'axe des ordonnées et le point C est la courbe $\mathcal{C}$.

1. On suppose dans cette question que le point B a pour abscisse $x = 2$.
   Montrer qu'une valeur approchée de l'aire du panneau publicitaire est de 3,6 m^2.
2. Parmi tous les panneaux publicitaires qui répondent aux contraintes de l'énoncé, quelles sont les dimensions de celui dont l'aire est la plus grande possible ?
   On donnera les dimensions d'un tel panneau au centimètre près.

II <u>Exercices de probabilités – statistiques</u>

<u>Exercice 8</u> *D'après un sujet de concours*

Ceci est un QCM. Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte.

Charly participe à un tournoi où il est opposé à Ali puis à Béatrice.

On note :

- A l'évènement : « Charly bat Ali » ;
- B l'évènement : « Charly bat Béatrice » ;
- X la variable aléatoire correspond au nombre de victoires de Charly.

Sachant que $P(A) = \frac{2}{5}$, que $P_A(B) = \frac{7}{10}$ et que $P(B) = \frac{12}{25}$, on peut affirmer que :

1. $P(A \cap \overline{B}) = \ldots$

(a) $\frac{3}{25}$.

(b) $\frac{5}{25}$.

(c) $\frac{7}{25}$.

(d) $\frac{9}{25}$.

2. $P_{\overline{A}}\left(B\right)=\ldots$

(a) $\frac{1}{5}$.

(b) $\frac{1}{4}$.

(c) $\frac{1}{3}$.

(d) $\frac{1}{2}$.

3. $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\ldots$

(a) $\frac{1}{5}$.

(b) $\frac{2}{5}$.

(c) $\frac{3}{5}$.

(d) $\frac{4}{5}$.

4. $P\left(A\cup B\right)=\ldots$

(a) $\frac{7}{25}$.

(b) $\frac{15}{25}$.

(c) $\frac{22}{25}$.

(d) $\frac{29}{25}$.

5. $P(X=2)=\ldots$

(a) $P(A \cap B)$.

(b) $P(\overline{A} \cap B)$.

(c) $P(A \cap \overline{B})$.

(d) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

6. $E(X)=\ldots$

(a) $\frac{19}{25}$.

(b) $\frac{22}{25}$.

(c) $\frac{25}{25}$.

(d) $\frac{18}{25}$.

<u>Exercice 9</u> *D'après un sujet de BAC*

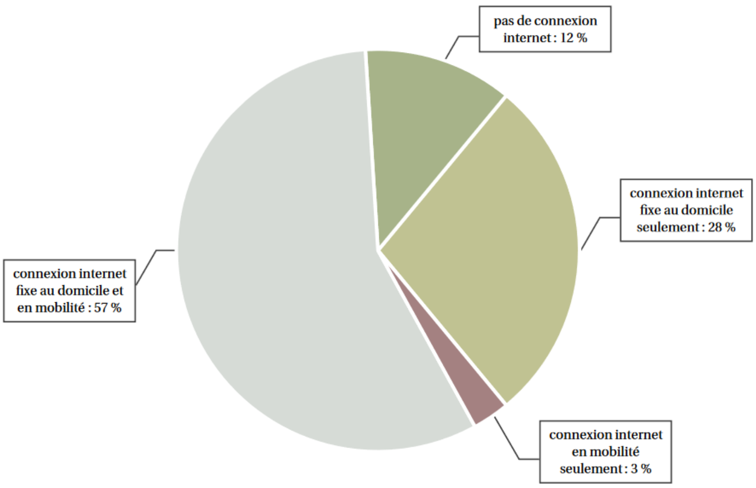
Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.
La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.
Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.
La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 € et lance la roue A ;
- s'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête ;
- s'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Soient E et F les événements suivants :
   E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges » ;
   F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».
   Montrer que $P(E)=0{,}02$ et $P(F)=0{,}17$.
3. Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.
   X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer $E(X)$ et en donner une interprétation.
4. Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).
   a) Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que :
   $p_n = 1-(0{,}9)^n$.
   b) Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.

Exercice 10 *D'après BAC 2017, Asie*

Le graphique suivant indique le type de connexion à internet dont disposent les Français âgés de plus de 12 ans en juin 2016.



Source : CREDOC, Enquêtes sur les « Conditions de vie et les aspirations », juin 2016.

On choisit au hasard une personne âgée de plus de 12 ans dans la population française.
On note D l'événement « la personne dispose d'une connexion internet fixe au domicile ».
On note M l'événement « la personne dispose d'une connexion internet en mobilité ».

Partie A

1. Donner sans justification $P(D \cap M)$, puis justifier que $P(D) = 0,85$.
2. Calculer la probabilité que la personne dispose d'une connexion internet fixe au domicile sachant qu'elle dispose d'une connexion internet fixe en mobilité.
3. Calculer la probabilité de l'événement «la personne dispose d'une connexion internet.
4. Calculer $P_{\bar{M}}(\bar{D})$.

Partie B

On interroge un échantillon aléatoire de 100 personnes dans la population française.
Soit X la variable aléatoire qui, à cet échantillon, associe le nombre de personnes ayant une connexion internet fixe au domicile.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
2. Déterminer $P(X \leq 75)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de Français ayant une connexion internet fixe au domicile pour un échantillon de taille 100.
2. Une enquête sur les usages du numérique, menée en juin 2016 auprès des habitants d'un petit village de montagne, amène au constat suivant : parmi les 100 habitants de plus de 12 ans de ce village, 76 d'entre eux disposent d'une connexion internet fixe au domicile.
   Que peut-on penser de l'équipement en connexion internet fixe au domicile dans ce village ?

<u>Exercice 11</u> *D'après BAC 2013, Asie*

Ceci est un QCM. Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte.

1. On choisit au hasard un réel de l'intervalle $[-2;5]$.

   Quelle est la probabilité que ce nombre appartienne à l'intervalle $[-1;1]$?

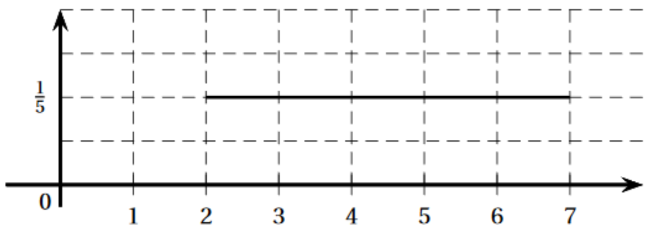
(a) $\frac{1}{5}$.

(b) $\frac{2}{7}$.

(c) $\frac{1}{2}$.

(d) 0,7 .

2. Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[2;7]$ dont la fonction de densité est représentée ci-dessous :



(a) $P(3 \leq X \leq 7) = \frac{1}{4}$.

(b) $P(X \geq 4) = P(2 \leq X \leq 5)$.

(c) $P(2 \leq X \leq 7) = \frac{1}{5}$.

(d) $E(X) = \frac{9}{5}$.

3. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne 3 et d'écart-type 2. Quelle est la valeur arrondie au centième de la probabilité $P(X \leq 1)$?

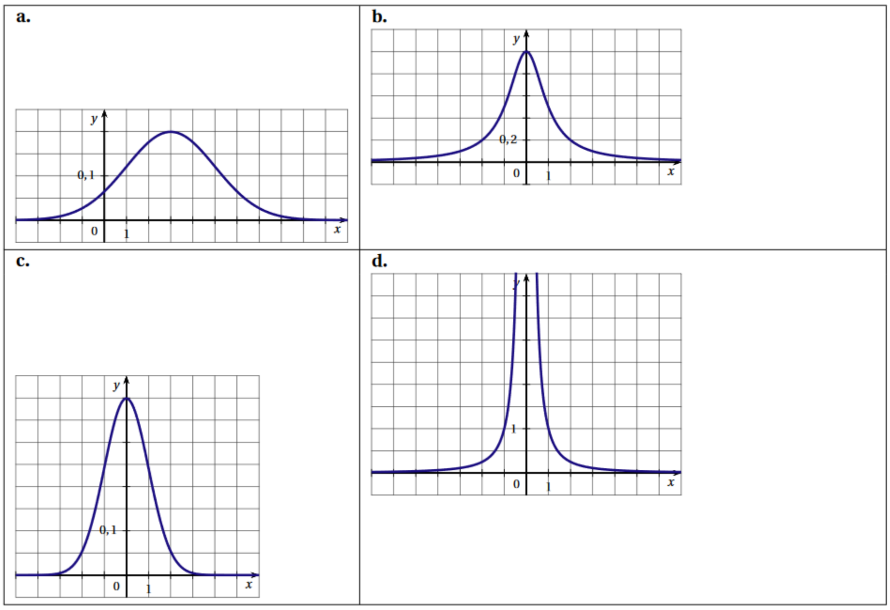
(a) 0,16 .

(b) 0,68 .

(c) 0,95 .

(d) 0,99 .

4. Quelle est la courbe représente la fonction de densité d'une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}$?



5. Lors d'un sondage avant une élection, on interroge 800 personnes (constituant un échantillon représentatif). 424 d'entre elles déclarent qu'elles voteront pour le candidat H.
Soit p la proportion d'électeurs de la population qui comptent voter pour H.
Lequel des intervalles ci-dessous est un intervalle de confiance au niveau de 95 % de la proportion p ?

(a) $[0,46;0,60]$.

(b) $[0,48;0,58]$.

(c) $[0,49;0,57]$.

(d) $[0,51;0,55]$.

<u>Exercice</u> 12 *D'après BAC 2015, Antilles*

Les deux parties sont indépendantes. On arrondira *les résultats à* 10^{-2} *près.*

Une machine permet le conditionnement d'un jus de fruit dans des bouteilles.
La quantité de jus injecté dans une bouteille par la machine, exprimée en ml (millilitre), est modélisée avec une variable aléatoire réelle X.
On admet que celle-ci suit une loi normale de moyenne $\mu = 500$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

Partie A

On prélève une bouteille au hasard en fin de chaîne de remplissage.

1. Déterminer $P(X \leq 496)$. Donner le résultat arrondi à 10^{-2} près.
2. Déterminer que la probabilité que la bouteille ait un contenu compris entre 497 et 500 millilitres.

3. Comment choisir la valeur de α afin que $P(500-\alpha \leq X \leq 500+\alpha)$ soit approximativement égale à 0,95 à 10^{-2} près.

Partie B

Une association de consommateurs a testé un lot de 200 bouteilles issues de cette chaîne de production.
Il a constaté que 15 bouteilles contiennent moins de 500 ml de jus de fruit contrairement à ce qui est annoncé sur l'étiquetage.
L'entreprise qui assure le conditionnement de ce jus de fruit affirme que 97 % des bouteilles produites contiennent au moins 500 ml de jus de fruit.
Le test réalisé par l'association remet-il en cause l'affirmation de l'entreprise ?

IV <u>Exercices divers</u>

<u>**Exercice 13**</u> *Un peu d'algèbre…*

1. Simplifier les expressions suivantes :
   $A = \frac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} - \frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$;
   $B = \frac{3+2\sqrt{5}}{2\sqrt{3}+1}$;
   $C = \left(\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$
2. Résoudre les inéquations et équations suivantes :
   a) $\sqrt{x^2-1} > 1$.
   b) $\sqrt{x^2-2x-3} \geq x-1$.
   c) $mx^2+(2m-1)x-2=0$ où m est un paramètre. *Discuter suivant les valeurs de* m *.*
   d) $\ln(e^{2x}-e^{x}+1)-2x<0$.
   e) $\frac{e^x-2}{e^{-x}(-e^x+3)} \geq 0$.

<u>**Exercice 14**</u> *Probabilités et suites…*

Une compagnie aérienne étudie l'évolution des réservations sur l'un de ses vols. Elle constate que l'état d'une place donnée évolue ainsi : elle est libre au jour 0 (jour d'ouverture des réservations), puis, si elle est libre au jour n il y a une probabilité 0,4 que quelqu'un la réserve au jour $n+1$. En revanche, si elle est réservée au jour n, elle reste réservée au jour $n+1$ avec la probabilité 0,9.
On note p_n la probabilité que la place soit réservée au jour n.

1. Faire un arbre pondéré.
2. Déterminer l'expression de p_{n+1} et montrer que $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
3. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = p_n - 0,8$.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique puis déterminer son expression en fonction de n.

b) En déduire l'expression de p_n.

c) Donner la limite de p_n.

Exercice 15 *Encadrement de* e^{-x} *- Difficile*

1. Montrer que, pour tout $t \geq 0, e^{-t} \leq 1$.
2. A l'aide d'intégrations successives, montrer que, que pour tout $x \geq 0$:

   $1 - x \leq e^{-x}$, puis $e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$.
3. Déduire de la question précédente que, pour tout $t > 0$:

   $1 - \frac{1}{t} \leq e^{-\frac{1}{t}} \leq 1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}$.
4. On pose $I = \int_{100}^{1000} e^{-\frac{1}{t}} dt$.

   Montrer que $I \approx 900 - \ln 10$ à 5×10^{-3} près.