Lycée militaire de Saint-Cyr **Corrigé du DS n°1 de mathématiques** **Term - Spé**

Thème : Suites **24/09/20**

Exercice 1

Etudier la limite de chacune des suites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

Exercice 2

1. f est une fonction trinôme du second degré.
   $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = 4$ et $\beta = f(\alpha) = 4$, de plus $a = -\dfrac{1}{4} < 0$, on en déduit les variations de f :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$

   f est croissante sur l'intervalle $[0;4]$, donc :
   si $0 \leqslant x \leqslant 4$, alors $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(4)$.
   Or $f(0) = 0$ et $f(4) = 4$ donc, si $0 \leqslant x \leqslant 4$, alors $0 \leqslant f(x) \leqslant 4$.
2. On démontre par récurrence que la propriété P_n : $0 \leqslant u_n \leqslant 4$ est vraie pour tout entier naturel n.
   - Initialisation
     $u_0 = 1$ donc la propriété $P_0 : 0 \leqslant u_0 \leqslant 4$ est vraie.
   - Hérédité
     Supposons que, pour un entier naturel n, la propriété $P_n : 0 \leqslant u_n \leqslant 4$.
     Si $0 \leqslant x \leqslant 4$, alors $0 \leqslant f(x) \leqslant 4$, on a donc $0 \leqslant f(u_n) \leqslant 4$.
     Or $f(u_n) = u_{n+1}$ donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
     On a démontré que la propriété P_{n+1} est vraie.
   - Conclusion : Pour tout entier naturel n, la propriété P_n est vraie.
3. Etudions la monotonie de la suite (u_n).
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n - \dfrac{1}{4}u_n^2 = u_n\left(1 - \dfrac{1}{4}u_n\right)$.
   $x - \dfrac{1}{4}x^2$ est un trinôme du second degré qui a pour racines 0 et 4, donc $x - \dfrac{1}{4}x^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in [0;4]$. On a vu que $0 \leqslant u_n \leqslant 4$ donc $u_n - \dfrac{1}{4}u_n^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
   La suite (u_n) est donc croissante.
   (u_n) est croissante et bornée, donc (u_n) est convergente.

Exercice 3

1. (a) $u_1 = \dfrac{3 \times u_0}{1+2u_0} = \dfrac{3 \times \frac{1}{2}}{1+2\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4}$

   et $u_2 = \dfrac{3 \times u_1}{1+2u_1} = \dfrac{3 \times \frac{3}{4}}{1+2\frac{3}{4}} = \dfrac{9}{10}$.

   (b) — Pour tout entier naturel n, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : $0 < u_n$.

   — *Initialisation* : Si $n = 0$

   Alors $u_0 = \dfrac{1}{2} > 0$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

   — *Hérédité* : Supposons que pour n entier naturel quelconque, on ait $\mathscr{P}_n$ vraie

   (c-à-d. $0 < u_n$). Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie aussi (c-à-d. $0 < u_{n+1}$).

   Par hypothèse de récurrence $0 < u_n$ donc $0 < 3u_n$ et $0 < 1+2u_n$.

   Ainsi, u_{n+1} est le quotient de deux nombres strictement positifs, donc $0 < u_{n+1}$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

   — $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, par le principe de récurrence on a bien pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

2. (a) Comme pour tout entier naturel $n, 0 < u_n$, pour étudier les variations de la suite, on peut comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{u_n} = \frac{3}{1+2u_n}$$

   Mais, $u_n < 1 \iff 2u_n < 2 \iff 1+2u_n < 3 \iff 1 < \dfrac{3}{1+2u_n}$ car $1+2u_n > 0$.

   Finalement la suite (u_n) est croissante.

   (b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 ; elle converge donc vers $\ell \leq 1$.

3. (a) Pour tout entier naturel n,

   $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\frac{3u_n}{1+2u_n}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{\frac{1+2u_n-3u_n}{1+2u_n}} = \frac{3u_n}{1-u_n} = 3v_n$$

   La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 3.

   (b) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 q^n = 3^n$.

   (c) Pour tout entier naturel n,

   $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n} \iff (1-u_n)v_n = u_n \iff v_n = u_n + u_n v_n \iff$

   $u_n = \dfrac{v_n}{1+v_n} \iff u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

   (d) Comme $3 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$. L'étude du quotient conduit donc à une forme indéterminée.

   $$u_n = \frac{3^n}{3^n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

   Comme $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$

   Par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 1$, enfin, par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

   La suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 4

1. **Proposition fausse**. Un contre-exemple est donné par la suite $u_n = \frac{1}{n+1}$. Alors, $v_n = -2(n+1) \longrightarrow -\infty$ c'est-à-dire que (v_n) ne converge pas.

2. **Proposition vraie**. Par hypothèse, on a :

$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{2}{u_n} \geq -1 \Leftrightarrow v_n \geq -1$ soit (v_n) minorée par -1.

3. **Proposition fausse**. Prenons le même contre-exemple qu'en (a). (u_n) est bien décroissante. On a $v_n = -2(n+1)$, et $v_{n+1} - v_n = -2(n+2) + 2(n+1) = -2 < 0$.

(v_n) est donc strictement décroissante.

4. **Proposition fausse**. En prenant la suite $u_n = (-1)^n$, on obtient :

$v_n = -\frac{2}{(-1)^n} = 2 \times (-1)^{n+1}$ et (v_n) diverge.

Exercice 5

1. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n : u_n \geqslant n^2$.
   Initialisation
   $P_0 : u_0 \geqslant 0^2$ est vraie car $u_0 = 2$.
   Hérédité
   Supposons que, pour un entier n, P_n est vraie, soit $u_n \geqslant n^2$.
   On a alors $u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1 \geqslant 3n^2 + 2n + 1$.
   Or, $3n^2 + 2n + 1 = 2n^2 + (n+1)^2 \geqslant (n+1)^2$.
   On en déduit que $u_{n+1} \geqslant (n+1)^2$.
   On a montré que, si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie.
   Conclusion
   D'après le principe de récurrence, $P_n : u_n \geqslant n^2$ est vraie pour tout entier naturel n.
2. Pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant n^2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc, par comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Bonus !

1. On a $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = u_n$. Puis, $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. On conclut que $u_n \to 1$.

2. Tout d'abord, on a pour tout entier naturel n, $n^2 + n > n^2 + 1$. Dans la somme, il y a n termes et que le terme le plus grand est $\frac{n}{n^2+1}$ et le plus petit est $\frac{n^2}{n^2+n}$, on a l'encadrement suivant :

$$n \times \frac{n}{n^2+n} \leq v_n \leq n \times \frac{n}{n^2+1} \text{ soit}$$

$$n \times \frac{n}{n(n+1)} \leq v_n \leq \frac{n^2}{n^2+1} \text{ soit}$$

$$\frac{n}{n+1} \leq v_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

d'où l'encadrement voulu.

Pour ce qui est de la limite, comme $\frac{n}{n+1} = \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$ et de même $\frac{n^2}{n^2+1} \to 1$, on en déduit par le théorème des « gendarmes » que $v_n \to 1$.