Soit un ensemble de nombres que l'on appellera D.

I Généralités sur les fonctions

1.1 Définitions

Définition Définir une fonction f sur D, c'est associer à chaque réel x de D un unique réel noté $f(x)$.
On note : $D \to \mathbb{R}$
$x \to f(x)$
On dit que $f(x)$ est l'image de x par f.
On dit que x est l'antécédent de $f(x)$.

Exemples 1) Soit g la fonction affine suivante : $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto -x+10$

g est la fonction qui, à chaque nombre réel associe son opposé augmenté de 10.

L'image de 0 est $g(0) = 10$, l'image de -2 est $g(-2) = 2 + 10 = 12$.

L'antécédent de 14 est x solution de l'équation $g(x) = 14$ soit $-x + 10 = 14$ soit $x = -4$.

L'antécédent de -3 est x solution de l'équation $g(x) = -3$ soit $-x + 10 = -3$ soit $x = 13$.

2) Soit h la fonction (du 2nd degré) suivante : $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2 - 1$

L'image de 0 est $h(0) = -1$, l'image de -2 est $h(-2) = (-2)^2 - 1 = 3$.

L'antécédent de 8 est x solution de l'équation $h(x) = 8$ soit $x^2 - 1 = 8$ soit $x^2 = 9$ donc $x = \pm 3$.

L'antécédent de -5 est x solution de l'équation $g(x) = -5$ soit $x^2 - 1 = -5$ soit $x^2 = -4$, impossible. Donc il n'y a pas d'antécédent de -5 par h.

Remarques 1) Un nombre possède une unique image.

2) Cependant, un nombre peut posséder plusieurs antécédents (ou aucun).

Un peu d'histoire des mathématiques

En 1717, le mathématicien suisse Jean Bernoulli donne une première définition de la notion de fonction :

« On appelle fonction d'une variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes. »

Définition Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image calculable par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction f, que l'on notera généralement D_f.

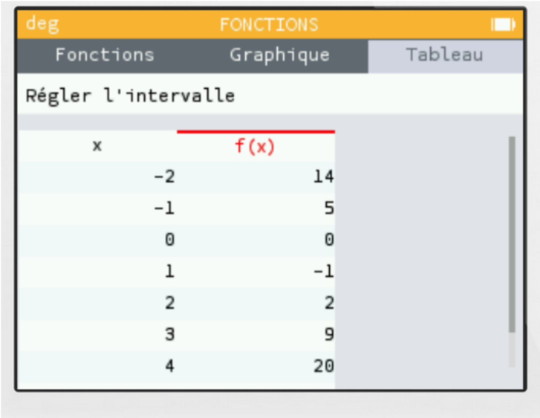
Exemples 1) Soit $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$. $f(x)$ existe si, et seulement si $x^2 - 4 \neq 0$ soit pour $x \neq \pm 2$.
Donc $D_f = \mathbb{R} - \{-2; +2\}$.

2) Soit $g(x) = \sqrt{-3x+9}$. $g(x)$ existe si, et seulement si $-3x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$. Soit $D_g =]-\infty; 3]$.

Définition *Représentation graphique*
Soit f une fonction définie sur D. On munit le plan d'un repère orthogonal.
La <u>courbe représentative</u> (ou représentation graphique) de la fonction f, que l'on notera généralement C_f est l'ensemble des points M de coordonnées (x, y), avec $x \in D$ et $y = f(x)$.

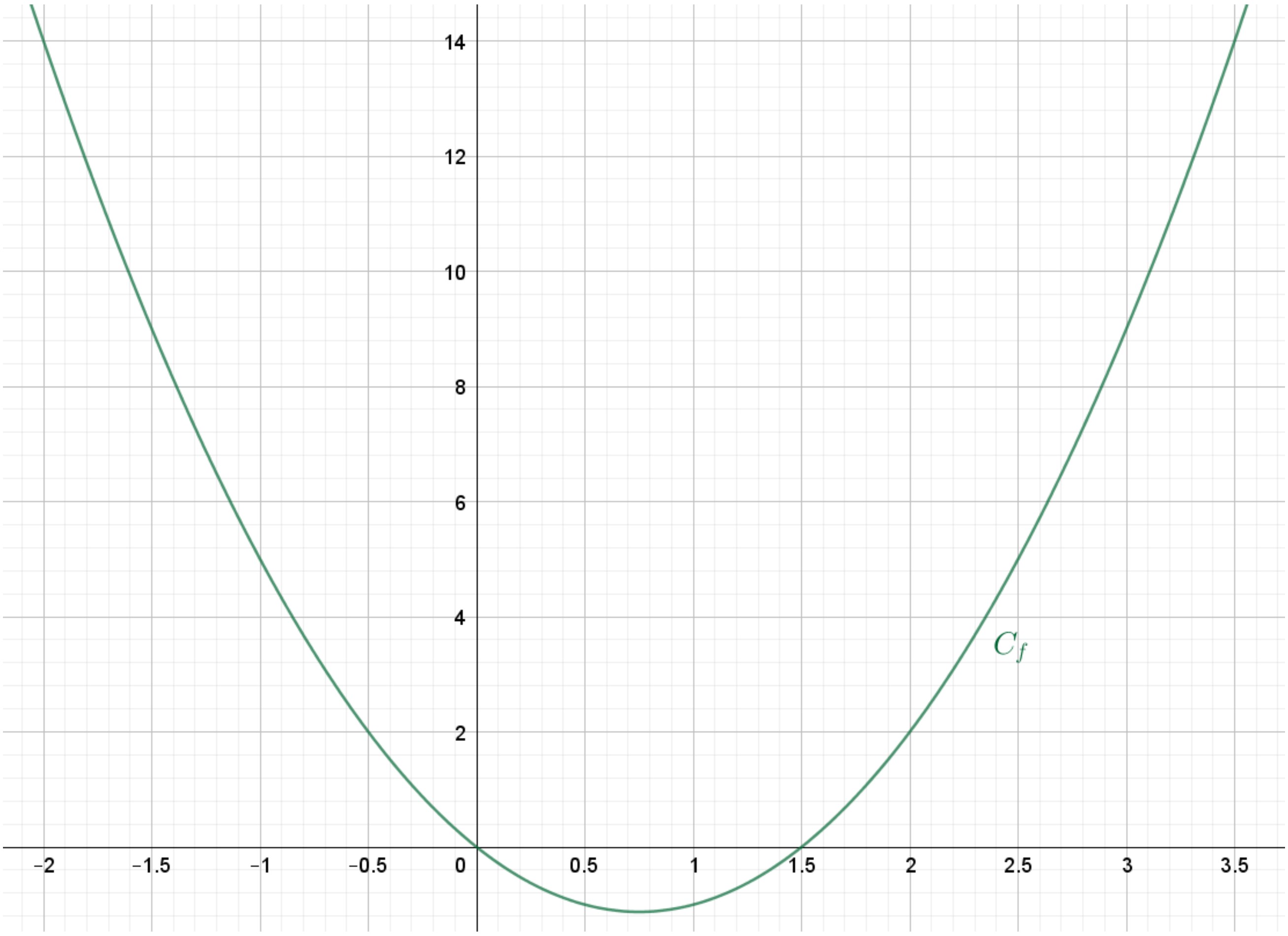
Exemple Soit la fonction $f(x) = 2x^2 - 3x$ définie sur $\mathbb{R}$.

On peut obtenir son tableau de valeurs à l'aide de la calculatrice :



x	f(x)
-2	14
-1	5
0	0
1	-1
2	2
3	9
4	20

Appelons C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.



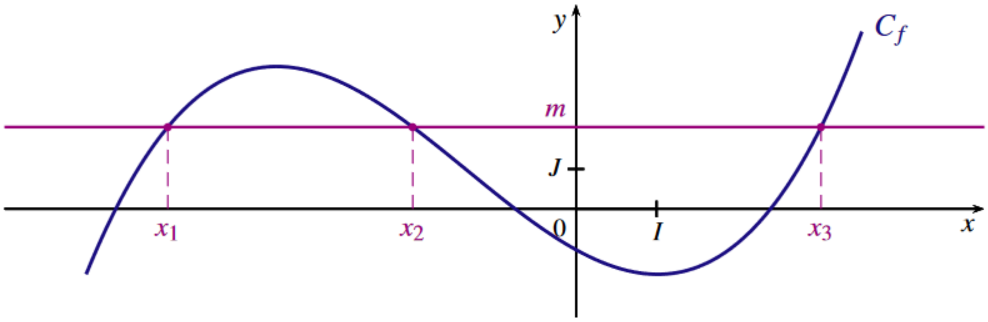
1.2 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Dans un 1er temps, étudions la comparaison d'une fonction avec un réel. Soit C_f la courbe d'une fonction f et m un réel.

- Les solutions de l'équation $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection entre la courbe C_f et la droite d'équation $y = m$.

- Les solutions de l'inéquation $f(x) < m$ (respectivement $f(x) > m$) sont les abscisses des points de la courbe C_f situés en-dessous (respectivement au-dessus) de la droite d'équation $y = m$.

Exemples 1)



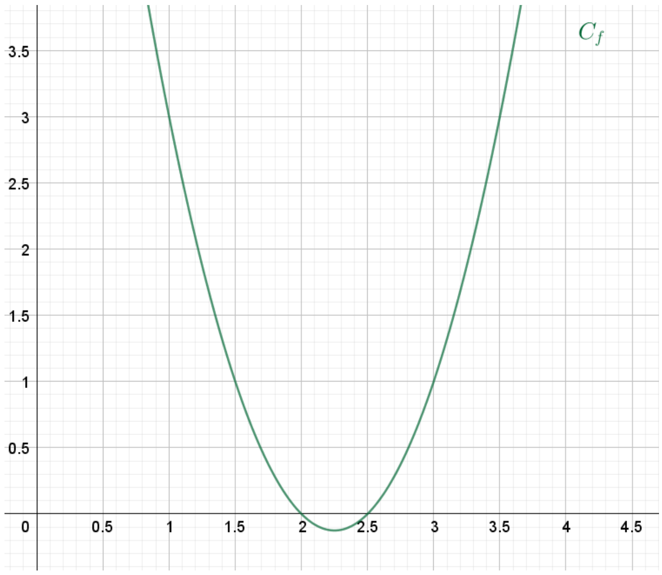
L'ensemble solution de l'équation $f(x) = m$ est $S = \{x_1; x_2; x_3\}$.

L'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \leq m$ est $S =]-\infty; x_1] \cup [x_2; x_3]$.

2) Soit $f(x) = 2x^2 - 9x + 10$ et $m = 3$.

L'ensemble solution de l'équation $f(x) = 3$ est $S = \{1; 3{,}5\}$.

L'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \leq 1$ est $S = [1{,}5; 3]$.



Passons maintenant à la comparaison de deux fonctions. Soit C_g la courbe d'une fonction g

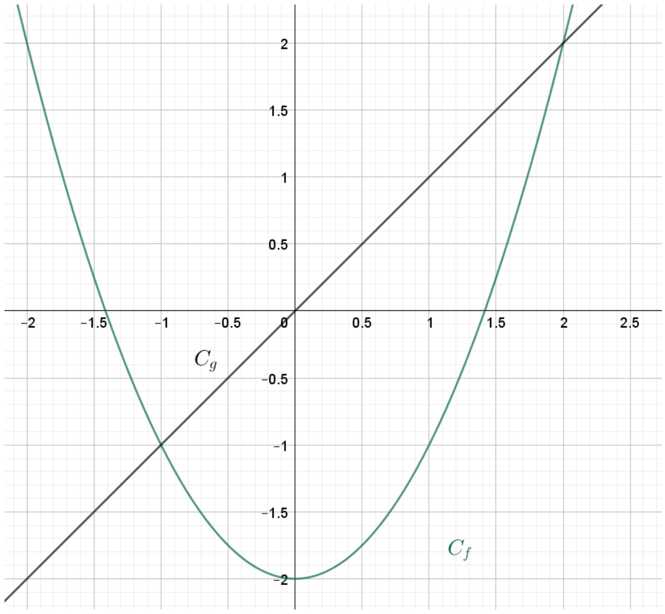
- Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection éventuels des courbes C_f et C_g.

- Les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ (respectivement $f(x) > g(x)$) sont les abscisses des points de C_f qui sont situés en-dessous (respectivement au-dessus) de C_g.

Exemple Soit $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = x$.

L'ensemble solution de l'équation $f(x) = g(x)$ est $S = \{-1; 2\}$.

L'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ est $S = [-1; 2]$.



II Variations d'une fonction

2.1 Taux de variation

Définition Soit f une fonction définie sur D. a et b sont deux nombres réels distincts de D.
Le taux d'accroissement de f entre a et b est le nombre réel $\tau_{a,b} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Exemples 1) La fonction carré : $f(x) = x^2$

Le taux de variation de la fonction carré entre *a* et *b*, deux réels distincts, est :

$$\tau(a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(b^2-a^2)}{(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{b-a} = b+a$$

2) Les fonctions affines : $f(x) = mx + p$

Le taux de variation de *f* entre *a* et *b* est :

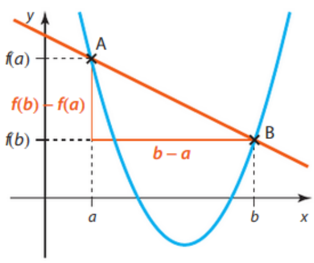
$$\tau(a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{mb+p-ma-p}{b-a} = \frac{m(b-a)}{b-a} = m$$

Le taux de variation de *f* ne dépend pas de *a* et *b*. Il est égal au coefficient directeur de la droite, représentation graphique de la fonction *f*.

Interprétation graphique du taux de variation

Le taux de variation est la pente de la droite passant par deux points distincts de la courbe.

En effet, si on place deux points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ sur la courbe de la fonction f, la pente (coefficient directeur) de la droite passant par A et B est le taux de variation de f entre a et b.



Remarque Certaines grandeurs correspondent à des taux de variation :

- La vitesse moyenne v entre deux instants t_1 et t_2 est le taux de variation de la distance parcourue d par rapport à la durée de l'intervalle de temps : $v = \frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1}$.

- L'accélération moyenne a entre deux instants t_1 et t_2 est le taux de variation de la vitesse v par rapport à la durée de l'intervalle de temps : $a = \frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1}$.

2.2 Fonctions monotones

Définition Soit f une fonction définie sur D. On dit que f est monotone sur D, si f est :
- soit croissante sur D,
- soit décroissante sur D,
- soit constante sur D.

Exemple La fonction inverse est monotone sur $]0;+\infty[$ alors que la fonction carré n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

Propriétés Soit f une fonction définie sur D. Si pour tous réels distincts a et b
(i) $\tau_{a,b} \geq 0, f$ est croissante sur D,
(ii) $\tau_{a,b} \leq 0, f$ est décroissante sur D,
(iii) $\tau_{a,b} = 0, f$ est constante sur D.

Remarque Dans le cas d'inégalité stricte, f est strictement monotone.

Exemple Soit $f(x) = -2x + 1$ et prenons a et b deux réels distincts de $\mathbb{R}$.

$$\tau_{a,b} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{-2b+1-(-2a+1)}{b-a} = \frac{-2b+1+2a-1}{b-a} = \frac{2a-2b}{b-a} = \frac{-2(b-a)}{b-a} = -2 < 0$$

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice Soit $f(x) = x^2 - 2x$. Montrer que f est croissante sur $[1;+\infty[$:

Soit a et b deux réels distincts de l'intervalle $[1;+\infty[$. On a :

$$\tau_{a,b} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{b^2-2b-(a^2-2a)}{b-a} = \frac{b^2-a^2-2b+2a}{b-a} = \frac{(b-a)(b+a)-2(b-a)}{b-a} = b+a-2$$

On $a \geq 1$ et $b \geq 1$ soit $b + a \geq 2$ donc $b + a - 2 \geq 0$. $\tau_{a,b} \geq 0$ et f est bien croissante sur $[1;+\infty[$.

III Fonctions polynômes de degré 2

3.1 Définition et représentation graphique

Définition On appelle fonction polynôme de degré 2 toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels connus (appelés les coefficients), et $a \neq 0$.
f est appelé trinôme ou fonction (polynôme) du 2nd degré.

Exemples 1) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$
2) $g(x) = -x^2 - 1$
3) $h(x) = \frac{1}{2}x^2$

Propriété La représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ est une parabole dont le sommet S a pour coordonnées (α, β) où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $= f(\alpha)$.
Cette parabole admet un axe de symétrie : la droite d'équation $x = \alpha$.

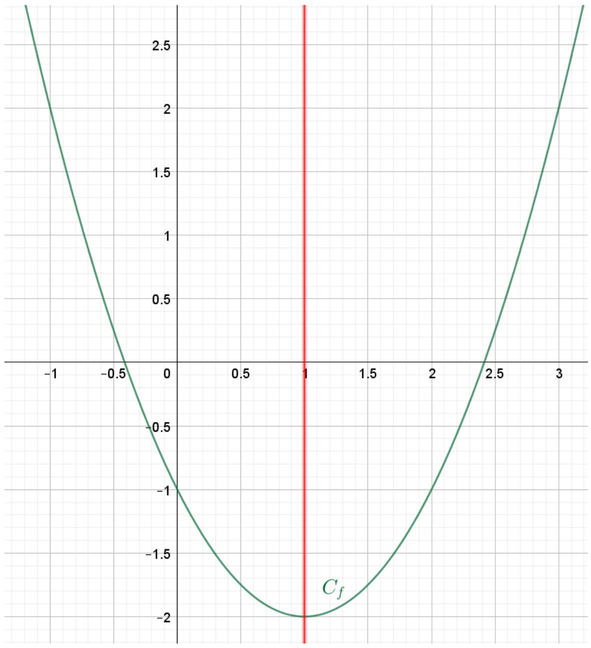
Exemple Soit la fonction $f(x) = x^2 - 2x - 1$.

On a :

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$.

La droite d'équation $x = 1$ est axe de symétrie de la parabole.

Son sommet est $S(1; -2)$.



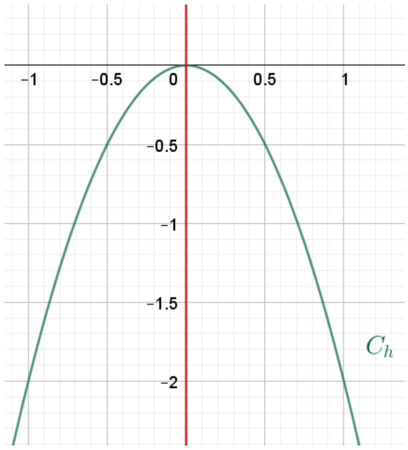
3.2 Cas particuliers importants de fonctions polynômes de degré 2

Propriétés Soit fonction h définie par $h(x) = ax^2$, a réel tel que $a \neq 0$.
(i) Si $a > 0$, h est décroissante sur $]-\infty; 0]$ puis croissante sur $[0; +\infty[$.
(ii) Si $a < 0$, h est croissante sur $]-\infty; 0]$ puis décroissante sur $[0; +\infty[$.
(iii) La représentation graphique de h est une parabole dont l'axe de symétrie est l'axe des ordonnées.

Exemple Soit $h(x) = -2x^2$.

Ici, $a = -2 < 0$ donc f est croissante sur $]-\infty; 0]$ puis décroissante sur $[0; +\infty[$.

L'axe de symétrie de la courbe C_h est bien l'axe des ordonnées.

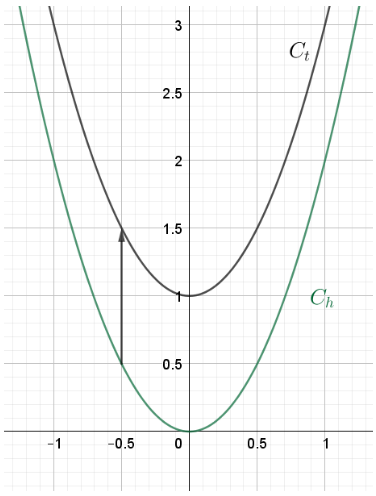


Propriétés Soit fonction t définie par $t(x) = ax^2 + b$ a et b deux réels avec $a \neq 0$.
(i) La fonction t a le même sens de variation que la fonction h précédente.
(ii) La représentation graphique de t s'obtient à partir de la représentation de h en effectuant une translation de vecteur $b\vec{j}$.

Exemple Soit $t(x) = 2x^2 + 1$.

La courbe de la fonction t s'obtient à partir de la courbe de la fonction h définie par $h(x) = 2x^2$ en effectuant une translation de vecteur $\vec{j}$.

La fonction t a les mêmes variations que la fonction h.



3.3 <u>Forme factorisée de fonctions polynômes de degré 2</u>

Vocabulaire Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et r un réel tel que $f(r) = 0$ alors on dit que r est une racine de f.

Propriétés Soit f la fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ appelée aussi <u>forme développée.</u>
(i) Si f admet deux racines x_1, x_2 (distinctes ou confondues) alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ appelée aussi <u>forme factorisée</u>.
(ii) Réciproquement, si $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ alors x_1 et x_2 sont les racines de f.
(iii) Dans les cas précédents, la courbe représentative de la fonction f admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ et son sommet a pour abscisse $\frac{x_1+x_2}{2}$.

Exemple Soit la fonction $f(x) = 2x^2 + x - 3$.

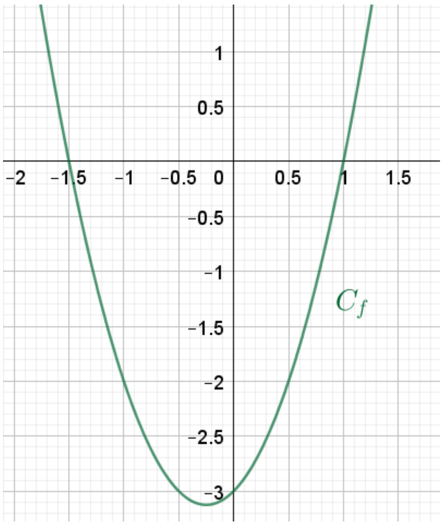
f admet deux racines : $x_1 = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = 1$.

Puisque graphiquement $f\left(-\frac{3}{2}\right) = f(1) = 0$.

Donc : $f(x) = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 1)$.

La droite d'équation $x = \frac{-\frac{3}{2}+1}{2} = -\frac{1}{4}$ est l'axe de symétrie de C_f.

Son sommet est situé au point d'abscisse $-\frac{1}{4}$.



Application au signe des fonctions polynôme de degré 2

Propriétés Soit f la fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ en supposant que $x_1 < x_2$.

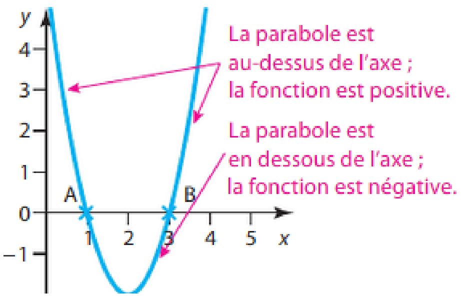
(i) Si $a > 0$, alors on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

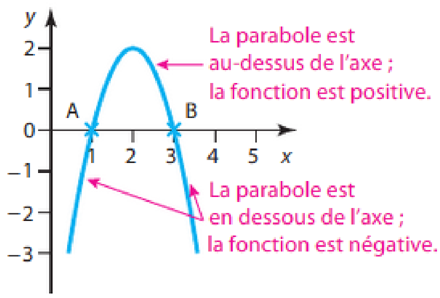
(ii) Si $a < 0$, alors on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Si $a > 0$



Si $a < 0$



Exemple Reprenons l'exemple précédent $f(x) = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 1)$.

Comme $a = 2 > 0$, on obtienr le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La représentation graphique de la fonction f (cf ci-dessus) permet de confirmer les résultats établis dans le tableau.

3.4 Equation $x^2 = k$

Propriété L'équation $x^2 = k$ possède :

- deux solutions si $k > 0$: $S = \{-\sqrt{k}; \sqrt{k}\}$.
- Une solution si $k = 0$: $S = \{0\}$.
- aucune solution si $k < 0$: $S = \emptyset$.

Exemples 1) $x^2 = 121$. On a $S = \{-11; 11\}$

2) $x^2 = -9$. On a $S = \{\emptyset\}$.

IV Fonctions polynômes de degré 3

4.1 Définition

Définition On appelle fonction polynôme de degré 3 toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont quatre nombres réels connus et $a \neq 0$.
f est aussi appelé fonction du troisième degré.

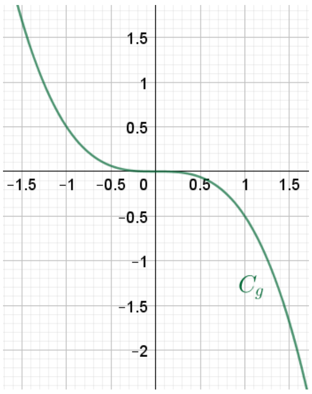
Exemples 1) $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - x + 1$
2) $g(x) = -x^3 - 1$
3) $h(x) = \frac{1}{3}x^3$

4.2 Cas particuliers importants de fonctions polynômes de degré 3

Propriétés Soit fonction g définie par $g(x) = ax^3$, a réel tel que $a \neq 0$.
(i) Si $a > 0$, g est croissante sur $\mathbb{R}$.
(ii) Si $a < 0$, g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple Soit $h(x) = -2x^3$.

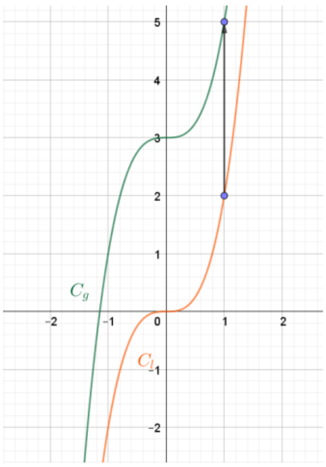
Ici, $a = -2 < 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.



Propriétés Soit fonction l définie par $l(x) = ax^3 + b$ a et b deux réels avec $a \neq 0$.
(i) La fonction t a le même sens de variation que la fonction g précédente.
(ii) La représentation graphique de l s'obtient à partir de la représentation de g en effectuant une translation de vecteur $b\vec{j}$.

Exemple Soit $l(x) = 2x^3 + 3$.

La courbe de la fonction t s'obtient à partir de la courbe de la fonction l définie par $g(x) = 2x^2$ en effectuant une translation de vecteur $3\vec{j}$. La fonction l a les mêmes variations que la fonction g.



4.3 Forme factorisée de fonctions polynômes de degré 3

Propriétés Soit f la fonction polynôme de degré 3 définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ appelée aussi forme développée.
(i) Si f admet deux racines x_1, x_2, x_3 (distinctes ou confondues) alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ appelée aussi forme factorisée.
(ii) Réciproquement, si $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ alors x_1,x_2 et x_3 sont les racines de f.

Exemple

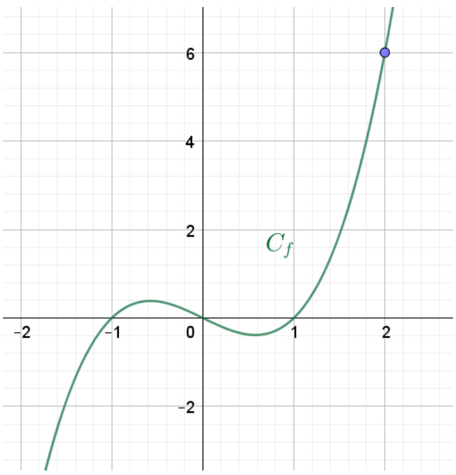
Soit la fonction polynôme de degré 3 définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Graphiquement, on remarque que -1, 0 et 1 sont les racines de f. Donc : $f(x) = a(x + 1)(x - 0)(x - 1) =$

$a(x + 1)x(x - 1)$.

On a de plus : $f(x) = ax(x^2 - 1) = a(x^3 - x)$ et $f(2) = 12$.

soit $a(8 - 2) = 6 \Leftrightarrow 6a = 6 \Leftrightarrow a = 1$.

D'où : $f(x) = x(x + 1)(x - 1)(= x^3 - x)$.



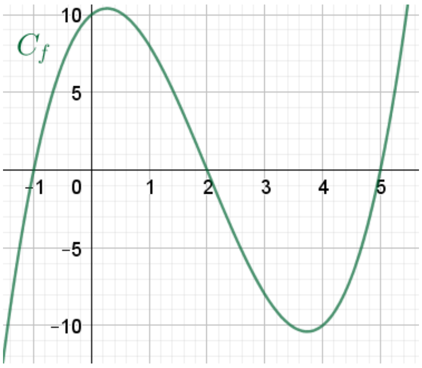
Application au signe des fonctions polynômes de degré 3

Soit la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x+1)(x-2)(x-5)$.

2 étant positif, le signe de $f(x)$ dépend de chaque facteur $x+1, x-2, x-5$.

On étudie ainsi le signe de chaque facteur et on présente les résultats dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	



La représentation graphique de la fonction f (cf ci-dessous) permet de confirmer les résultats établis dans le tableau.

Remarque Dans le cas où $f(x) = -2(x+1)(x-2)(x-5)$, faire rentre rentrer le coefficient -2 dans le 1er facteur soit $f(x) = (-2x-1)(x-2)(x-5)$ puis faire comme précédemment.

4.4 Equation $x^3 = k$

Propriété L'équation $x^3 = k$ avec $k \geq 0$ possède une unique solution $\sqrt[3]{k}$ que l'on peut noter $k^{\frac{1}{3}}$.

Exemples 1) L'équation $x^3 = 27$ admet une unique solution $x = \sqrt[3]{27} = 3$.

2) L'équation $x^3 = -8$ admet une unique solution $x = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2$.

On peut le vérifier graphiquement :