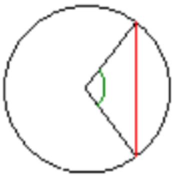
Histoire des mathématiques

Il faut remonter jusqu'aux babyloniens, 2000 ans avant notre ère, pour trouver les premières traces de tables de données astronomiques. Car à la base, la trigonométrie est une géométrie appliquée à l'étude du monde, de l'univers et est indissociable de l'astronomie.
On attribue à Hipparque de Nicée (-190 ; -120) les premières tables trigonométriques. Elles font correspondre l'angle au centre et la longueur de la corde interceptée dans le cercle.



Le grec Claude Ptolémée (90 ? ; 160 ?) poursuit dans l'*Almageste* les travaux d'Hipparque avec une meilleure précision et introduit les premières formules de trigonométrie.
Plus tard, l'astronome et mathématicien Regiomontanus (1436 ; 1476), de son vrai nom Johann Müller développe la trigonométrie comme une branche indépendante des mathématiques. Il serait à l'origine de l'usage systématique du terme *sinus.*
Au XVIe siècle, le français François Viète (1540 ; 1607), conseiller d'Henri IV, fera évoluer la trigonométrie pour lui donner le caractère qu'on lui connaît aujourd'hui.

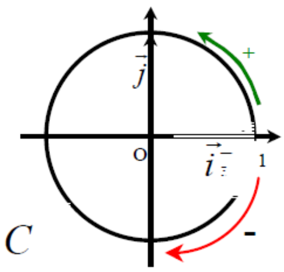
De nos jours, la trigonométrie trouve des applications très diverses, particulièrement dans les sciences physiques. La propogation des ondes, par exemple, est transcrite par des fonctions trigonométriques (fonctions $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto \sin x$; $x \mapsto \tan x$).

I Cercle trigonométrique et radian

1.1 Cercle trigonométrique

Définition Un cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ est un cercle de rayon 1 sur lequel on a distingué deux sens de parcours :
* le sens direct (+) qui est contraire au sens des aiguilles d'une montre ;
* le sens indirect (-) qui est le sens des aiguilles d'une montre.

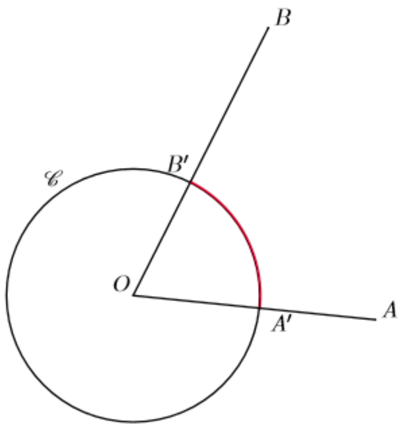
Figure



Remarque La longueur du cercle trigonométrique est 2π et celle d'un quart de cercle $\frac{\pi}{2}$.

1.2 Le radian

Soit O, A, B trois points du plan distincts deux à deux. On considère le cercle de centre O et de rayon 1.



Définition La mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$ est la longueur de l'arc que l'angle intercepte sur le cercle.

Sur la figure ci-dessus, la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$ est la longueur de l'arc $A'B'$.

Propriété La mesure en radians est proportionnelle à la mesure en degrés.

Valeurs remarquables

mesure en degrés	0°	30°	45°	60°	90°	180°
mesure en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

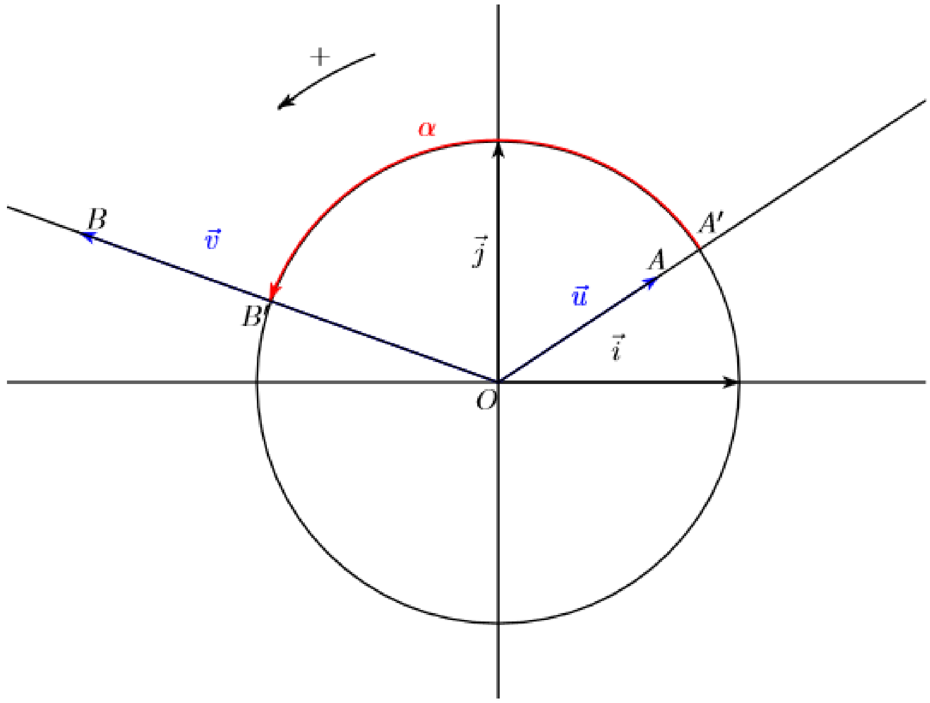
Un angle plat mesure $\pi\ rad$, un angle droit mesure $\frac{\pi}{2}\ rad$.

II Mesures d'un angle orienté de vecteurs

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls du plan. L'angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le couple $(\vec{u}\,,\vec{v})$.

2.1 Angle orienté de vecteurs : une définition par la mesure

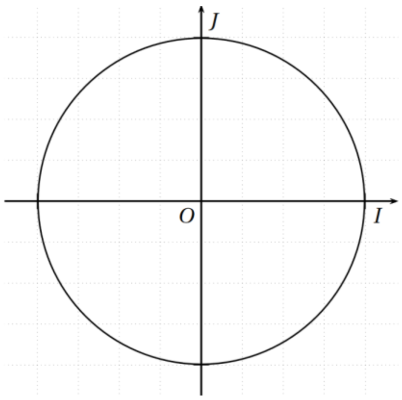
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls du plan. Soit A le point du plan tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.
La demi-droite [OA] coupe $\mathcal{C}$ en A' et la demi-droite [OB] coupe $\mathcal{C}$ en B'.



Une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}\,,\vec{v})$, en radians, est une mesure de l'arc intercepté A'B'=α.

Remarque Un angle orienté possède plusieurs mesures.

Exemple



L'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}\,,\overrightarrow{OJ}\right)$ mesure $\frac{\pi}{2}\ rad,\ \frac{5\pi}{2}\ rad, -\frac{3\pi}{2}\ rad,\ \frac{9\pi}{2}\ rad, \dots, \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi;$ où k est entier relatif.

2.2 <u>Mesure principale</u>

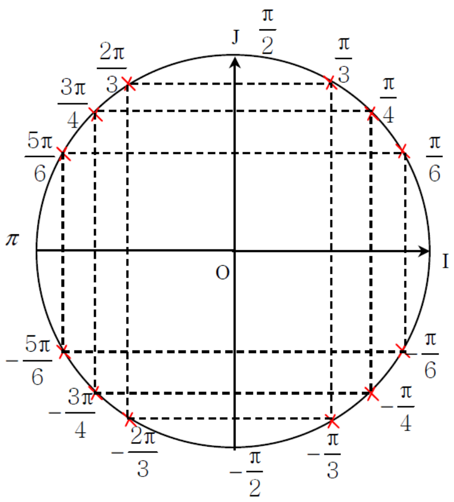
Définition Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls du plan. Il existe une unique mesure de l'angle orienté $(\vec{u}\,,\vec{v})$ appartenant à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$, cette mesure est appelée <u>mesure principale</u> de l'angle $(\vec{u}\,,\vec{v})$.

Remarque Cette mesure correspond au trajet le plus court de A' à B' sur le cercle.

Exemples 1) Déterminons la mesure principale de $\frac{27\pi}{4}$: On divise 27 par 4 soit 6.75, le multiple de 2 le plus proche est 6. On a $\frac{27\pi}{4} - 6\pi = \frac{3\pi}{4} \in]-\pi;\pi]$ donc $\frac{3\pi}{4}$ est la mesure principale de $\frac{27\pi}{4}$.

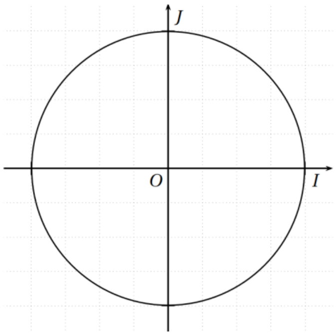
2) Déterminons la mesure principale de $-\frac{38\pi}{5}$: on divise 38 par 5 soit 7.8, le multiple de 2 le plus proche est 8. On a $-\frac{38\pi}{5} + 8\pi = \frac{2\pi}{5} \in]-\pi;\pi]$ donc $\frac{2\pi}{5}$ est la mesure principale de $-\frac{38\pi}{5}$.

Valeurs principales remarquables



III <u>Sinus et cosinus</u>

On considère un angle orienté $(\vec{u}\,,\vec{v})$, dont α est une mesure en radians. On appelle M le point du cercle trigonométrique associé à α.

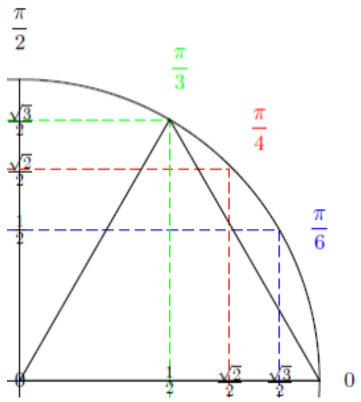


- $\cos(\vec{u}\,,\vec{v}) = \cos\alpha$, c'est l'abscisse du point M ;
- $\sin(\vec{u}\,,\vec{v}) = \sin\alpha$, c'est l'ordonnée du point M.
- *Culture générale :*$\forall\alpha \neq \frac{\pi}{2}$; $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

On rappelle les propriétés suivantes :

- Propriété d'encadrement : $-1 \leq \cos x \leq 1$; $-1 \leq \sin x \leq 1$
- Propriété fondamentale : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- Les valeurs remarquables ci-contre :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



3.1 Sinus et cosinus d'angles associés

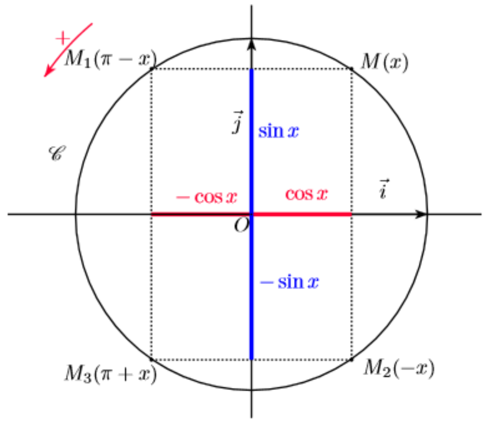
Propriété *Angles opposés*
(i) $\cos(-x) = \cos\ x$
(ii) $\sin(-x) = -\sin\ x$

Propriété *Angles supplémentaires*
(i) $\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$

(ii) $\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\sin(\pi + x) = -\sin x$

Figure

Soit x un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique associé au nombre x.
M_1, M_2 et M_3 sont les points associés respectivement aux réels $\pi - x$, $-x$ et $\pi + x$.



M_1 est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.
M_2 est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.
M_3 est le symétrique de M par rapport à l'origine O du repère.

Exemples 1) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

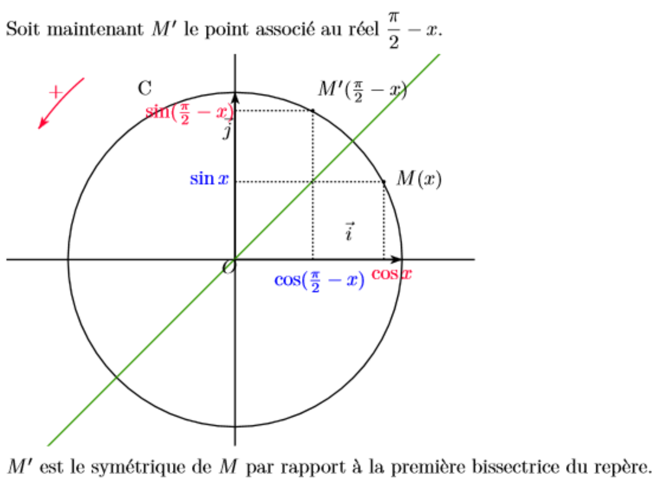
2) $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{4\pi+\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Remarque Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos\ (x)$ et $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin\ (x)$.

Propriété *Angles complémentaires*
(i) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

(ii) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

Figure



Exemple $\cos(\frac{4\pi}{6}) = \cos\left(\frac{3\pi+\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

Exercice Simplifier $A = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - \cos(x-\pi) + \cos(-x-\pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)$

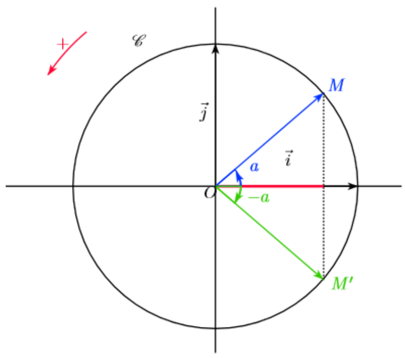
$$\begin{aligned} A &= \cos(x) - \cos(-(\pi-x)) + \cos(-(\pi+x)) + \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right) \\ &= \cos(x) - \cos(\pi-x) + \cos(\pi+x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \\ &= \cos(x) + \cos(x) - \cos(x) - \cos(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

3.2 Equations trigonométriques

Il s'agit dans cette partie d'apprendre à résoudre dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ des équations en x comportant un cosinus ou un sinus, c'est-à-dire à trouver tous les x de l'intervalle I vérifiant ce type d'équations.

Propriété *équation* « $\cos x = \cos a$ »
Soit un réel a. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = \cos a$ sont les réels $a + 2k\pi$ et $-a + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

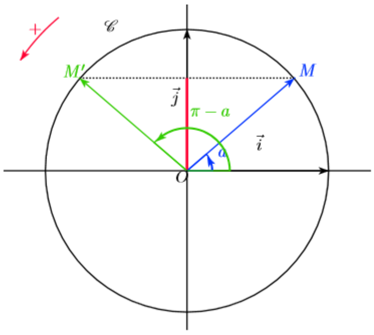
Figure



Exemple Dans $\mathbb{R}$, $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k\times 2\pi \\ x = -\frac{\pi}{5} + k\times 2\pi \end{cases}$, où k est un entier relatif.

Propriété *équation « $\sin x = \sin a$ »*
Soit un réel a. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = \sin a$ sont les réels $a + 2k\pi$ et $\pi - a + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

Figure



Exemple Dans $\mathbb{R}$, $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k \times 2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{12} + k \times 2\pi = \frac{11\pi}{12} + k \times 2\pi \end{cases}$, où k est un entier relatif.

Exercice Résoudre dans $]-\pi;\pi]$, $\sin x = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

D'abord dans $\mathbb{R}$, $\sin x = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi \\ x = \pi + \frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi = \frac{5\pi}{3} + k \times 2\pi \end{cases}$, où k est un entier relatif.

$x_1 = \frac{-2\pi}{3} \in]-\pi;\pi]$ et $x = \frac{5\pi}{3} \notin]-\pi;\pi]$ soit $x_2 = \frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3} \in]-\pi;\pi]$.

Donc dans $]-\pi;\pi]$, $S = \{\frac{-2\pi}{3}; \frac{-\pi}{3}\}$

IV Fonctions circulaires

On appelle fonctions circulaires les fonctions liées au cercle trigonométrique comme la fonction sinus, la fonction cosinus ou encore la fonction tangente.

4.1 Généralités

Définition
(i) La fonction cosinus est définie de la façon suivante ; cos : $\begin{cases} \mathbb{R} \to [-1;1] \\ x \mapsto \cos\, x \end{cases}$.

(ii) La fonction sinus est définie de la façon suivante ; sin : $\begin{cases} \mathbb{R} \to [-1;1] \\ x \mapsto \sin\, x \end{cases}$

Propriétés *Périodicité*
(i) La fonction cosinus est périodique de période 2π c'est-à-dire que pour tout x réel, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ (la courbe représentative est inchangée par la translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$).

(ii) La fonction sinus est périodique de période 2π c'est-à-dire que pour tout x réel, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ (la courbe représentative est inchangée par la translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$).

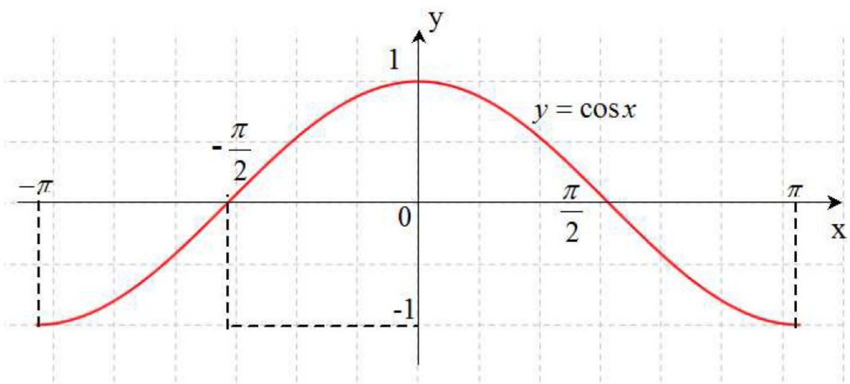
Propriétés *Parité*
(i) La fonction cosinus est paire c'est-à-dire que pour tout x réel, $\cos(-x) = \cos x$ (la courbe représentative admet pour axe de symétrie l'axe des ordonnées).

(ii) La fonction sinus est impaire c'est-à-dire que pour tout x réel, $\sin(-x) = -\sin x$ (la courbe représentative admet pour centre de symétrie l'origine du repère).

4.2 Variations et représentations graphiques

- **La fonction cosinus, $f(x) = \cos x$**

x	0	π
f	$1 \searrow$	-1



- **La fonction sinus, $f(x) = \sin x$**

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
f	$0 \nearrow$	1	$\searrow 0$