Histoire des mathématiques

C'est au XIXème siècle que le mathématicien prussien Hermann Grassmann (1809 – 1877) est amené à développer le calcul vectoriel dans le cadre de son étude… des marées !
En 1839, Grassmann rend sa thèse intitulée « Théorie des flots et des marées ». Ce travail, ignoré par son examinateur, ne sera publié qu'en 1911 alors qu'il contient des éléments de calcul vectoriel précurseurs pour l'époque, comme la somme de deux vecteurs ou le déterminant de trois vecteurs de l'espace.
En 1844, il publie sa « Théorie de l'extension » qui semble être la 1ère publication dans le cadre nouveau de la théorie des espaces vectoriels. C'est dans cet ouvrage, passé presque aussi inaperçu que sa thèse, que Grassmann définit le produit linéaire, que nous appelons aujourd'hui produit scalaire. Le mot « scalaire » provient du latin « scala » qui signifie échelle.
Le produit scalaire est utilisé en chaudronnerie pour calculer un angle de tuyauterie ou un angle de coupe, mais aussi par les pilotes d'avion pour corriger la trajectoire en cas de vent latéral, même si de nombreux calculs sont automatisés dans les cockpits actuels. Les résultats issus du produit scalaire sont utilisés par les systèmes GPS ou encore pour estimer la distance entre deux astres.

Dans la suite du cours, nous nous placerons dans un repère orthonormé (O ; I, J) lorsque c'est nécessaire.

I Quelques rappels

Soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du repère. Alors, on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur dans le repère. On note la norme du vecteur $\vec{u}$, $\|\vec{u}\|$. Et, on a : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. C'est la longueur du vecteur.

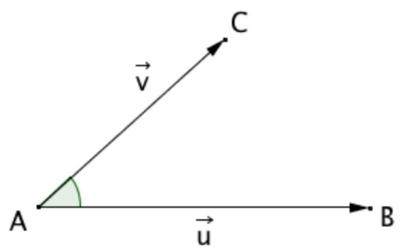
II Définition et propriétés du produit scalaire

2.1 Définition géométrique

Définition Le produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par un vecteur $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v}}$ (se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ »), défini par :
(i) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.
(ii) $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

Remarques 1) Par convention, $\vec{u}.\vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$ (appelé carré scalaire du vecteur $\vec{u}$). On a $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ (c'est donc la longueur du vecteur $\vec{u}$ au carré).

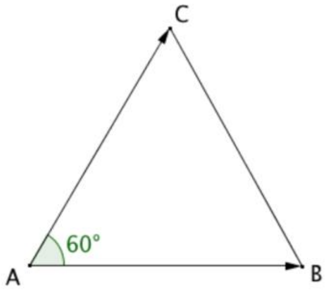
2) On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC}) = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$



Exemple Soit un triangle ABC équilatéral de côté a.

Alors, on a :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC}) = a \times a \times \cos(60°) = \frac{a^2}{2}$.



Attention Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Ecrire par exemple $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$ est une maladresse à éviter !

2.2 <u>Propriétés du produit scalaire</u>

Propriété Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs. Soit λ un réel.

$(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda \times (\vec{u}.\vec{v})$

$\vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \lambda \times (\vec{u}.\vec{v})$

$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

$(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$

Exemple Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$ et $\vec{u}.\vec{v} = 4$.

Alors, on a : $2\vec{u}.(\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} = 4 - 8 = -4$.

Définition Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux signifie que, si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur. On notera $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Propriété Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont <u>orthogonaux</u> si, et seulement si, <u>$\vec{u}.\vec{v} = 0$</u>.

Démonstration

Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.
Supposons le contraire.

$\vec{u}.\vec{v} = 0$

$\Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0$

$\Leftrightarrow$ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

2.3 <u>Expression analytique du produit scalaire</u>

Propriété On se place dans un repère orthonormé.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

Exemple Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{-2}{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -9\end{pmatrix}$

On a $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) \times (-9) = -\frac{1}{4} + 6 = \frac{23}{4}$.

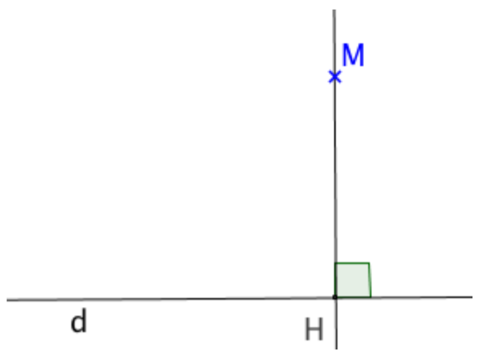
III Produit scalaire et projeté orthogonal

Propriété Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et colinéaires.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires et de même sens, $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires et de sens contraire, $\vec{u}.\vec{v} = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$.

Définition Soit (d) une droite et M un point du plan.
Le projeté orthogonal du point M sur la droite (d) est le point d'intersection H de la droite (d) et de la perpendiculaire à (d) passant par M.

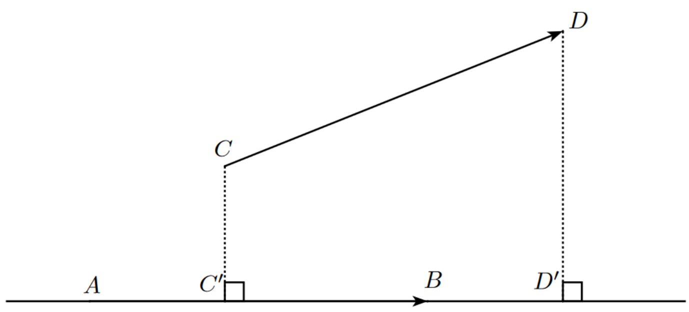
Figure



La propriété suivante permet de ramener le calcul du produit scalaire de deux vecteurs au calcul du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires, calcul en général plus aisé (d'après la propriété ci-dessus).

Propriété Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls.
Les points C' et D' sont les projetés orthogonaux respectivement de C et de D sur la droite (AB).
Alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'} = \pm AB \times C'D'$.

Figure



Démonstration

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}.$

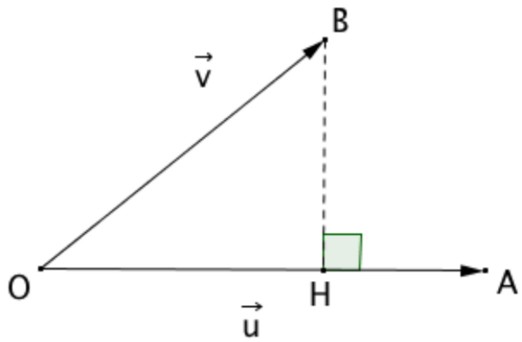
Car $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CC'}$ et $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{D'D}$.

Par abus de langage, on dit que $\overrightarrow{C'D'}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{CD}$ sur $\overrightarrow{AB}$.

➔ Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$, on peut remplacer l'un des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{CD}$ par son projeté orthogonal sur l'autre vecteur.

Propriété *Cas particulier*
Soit trois points A,B et O avec A, B distincts.
Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA), alors : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = \pm OA \times OH$.

Figure



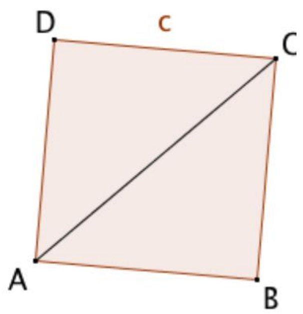
Démonstration

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}\right)$$
$$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB}$$
$$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$$

Car $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{HB}$.

Exemple Soit ABCD un carré.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB \times AB = c^2$.



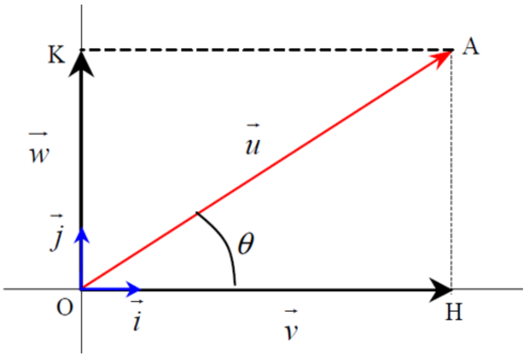
Décomposition d'un vecteur selon deux axes orthogonaux

Le vecteur $\vec{u}$ se décompose de manière unique sous la forme : $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$. Où, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont les projetés respectifs du vecteur $\vec{u}$ sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.
De plus, on a : $\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \cos(\theta)\vec{\imath}$ et

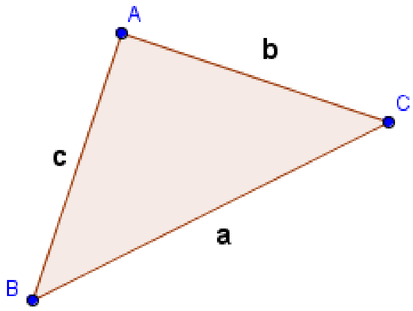
$\vec{w} = \|\vec{u}\| \times \sin(\theta)\vec{\jmath}$.

En effet, on a : $OH = AO \times \cos(\theta)$ et

$OK = AB \times \sin(\theta)$.



IV <u>Théorème d'Al-Kashi</u>



Propriété *Théorème d'Al-Kashi*
Dans un triangle ABC, avec les notations ci-dessus, on a les relations suivantes :

(1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$
(2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$
(3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\hat{C}$

Démonstration

À l'aide du produit scalaire, c'est immédiat :

$$a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Remarque Le théorème d'Al-Kashi est une généralisation du théorème de Pythagore. En effet, si le triangle ABC est rectangle en A alors on a la relation suivante :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} = b^2 + c^2 - 2bc\cos(90^\circ) = b^2 + c^2$.

Intérêt de cette propriété sur un exemple

Soit ABC un triangle avec $b = 3, c = 8$ et $A = 60^\circ$.

Calculons la valeur exacte de a ainsi que B et C (en degrés à 10^{-1} près).

D'après la formule d'Al-Kashi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 9 + 64 - 48 \times \frac{1}{2} = 49$$

D'où : $a = 7$

Déterminons $\cos B$ à l'aide de la formule d'Al-Kashi :

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{13}{14}$$

On a $\cos B > 0$ et ABC triangle donc $B \in]0 ; 90[$. On calcule donc $B = \arccos \frac{13}{14} \simeq 21{,}8°$.

On peut calculer C avec la relation $A + B + C = 180$. Cependant, à titre de vérification, procédons comme précédemment : déterminons $\cos C$ à l'aide de la formule d'Al-Kashi :

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{1}{7}$$

On a cette fois $\cos C < 0$ et ABC triangle donc $C \in]90 ; 180[$. On calcule $C = \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) \simeq 98{,}2°$.

On vérifie bien $A + B + C = 180$.

Histoire des mathématiques *– biographie d'Al-Kashi (? – Environ 1430)*

D'origine persane, l'astronome et mathématicien Al-Kashi vit à la cour du prince Ulough-Beg (1393-1449) à Samarkand. Ce dernier protégeant les sciences et les arts, Al-Kashi est à l'abri du besoin. Son principal apport aux mathématiques est l'introduction systématique des fractions décimales (fractions ayant pour dénominateur 10, 100,1000, …), dont il explique le maniement dans son ouvrage Clé de l'arithmétique. A la mort d'Oulough-Beg, l'exil à Constantinople de l'école de Samarkand permet de diffuser cette nouveauté chez les turcs, puis probablement ensuite en Occident.
Al-Kashi maîtrise le calcul, on lui doit des extractions de racines sixièmes de nombres en écriture sexagésimale (système de numérotation utilisant la base 60), et un calcul de π avec seize décimales, par une méthode traditionnelle, certes, mais avec une précision inégalée jusqu'à la fin du seizième siècle. Il connaît ce que l'on appelle maintenant le *triangle de Pascal* (que vous verrez en terminale). Al-Kashi est le dernier grand mathématicien du monde arabe, juste au moment où la culture occidentale prendra la relève.