## *Un peu d'histoire des mathématiques*

On sait depuis les babyloniens résoudre les équations dites du second degré. Cependant, on est resté longtemps sans méthode générale de résolution des équations du 3ème degré ($ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$). Ce n'est qu'au XVIe siècle qu'un mathématicien italien, Tartaglia, découvrit une méthode générale de résolution de ces équations. Il eut pour cela recourt à l'utilisation de ce qui fut qualifié à l'époque d'artifice : un nombre $x$ immaginaire tel que son carré valle $-1$ ($x^2 = -1$ ). Ce n'est par la suite que ce nombre acquerra son statut de nombre, sera renommé $i$ par Euler mathématicien Suisse Euler (1707-1783) en 1777 et donnera naissance aux nombres complexe qui seront étudiés en tant que nombres et permettront le développement de pans entiers des mathématiques.

# I Forme algébrique

## 1.1 Premières définitions

**Définitions** L'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres de la forme $a + bi$ où $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ et $i$ est un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$. On a :

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi\,;(a\,;b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

L'écriture $z = a + bi$ est appelée forme algébrique du nombre complexe, le réel $a$ est appelé la partie réelle de $z$ et le réel $b$ sa partie imaginaire.

**Notations** On convient de noter $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$.

**Remarques** 1) Si $b = 0$, alors $z = a$ donc $z$ est un réel et donc $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2) Si $a = 0$, alors $z = bi$ est dit imaginaire pur.

3) Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si ils ont la même partie réel et la même partie imaginaire.

**Exemples** 1) $1 - i$ est un nombre complexe : 1 est sa partie réelle et -1 sa partie imaginaire.

2) $3{,}5i$ est un nombre complexe : 0 est sa partie réelle et 3,5 sa partie imaginaire ; on dit que c'est un imaginaire pur.

## 1.2 Opérations sur les nombres complexes

Les calculs se font de manière identique que dans $\mathbb{R}$ **sauf qu'il faut rassembler les parties réels et imaginaires. Enfin, ne pas oublier que $i^2 = -1$ !**

**Propriété** L'addition, la soustraction et le produit s'effectuent dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ de la même manière que dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, avec $i^2 = -1$.

**Exemples** Soit $z = \frac{1}{2} - i$ et $z' = -2 + \frac{1}{2}i$

1) $z + z' = \frac{1}{2} - 2 + \left(-1 + \frac{1}{2}\right)i = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i.$

2) $z' - z = -2 + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} + i = -2 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + 1\right)i = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}i.$

3) $z.z' = \left(\frac{1}{2} - i\right).\left(-2 + \frac{1}{2}i\right) = -1 + \frac{1}{4}i + 2i + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + 2\right)i = -\frac{1}{2} + \frac{9}{4}i.$

## II Conjugué, inverse et quotient d’un nombre complexe

### 2.1 Conjugué d’un nombre complexe

**Définition** Soit $z = a + bi$ un nombre complexe.
Le conjugué du complexe $z$ est $\bar{z} = a - bi$.

**Exemples** 1) Le conjugué du nombre complexe $z = -9 + \sqrt{2}i$ est $\bar{z} = -9 - \sqrt{2}i$.

2) On a $\overline{-2i + 1} = 1 + 2i$

3) $\overline{\frac{1}{2}i} = -\frac{1}{2}i$ et $\overline{-2} = -2$.

**Propriétés** Soit $z, z'$deux nombres complexes où $z = a + bi$.
(i) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$ ;

(ii) $\overline{z.z'} = \bar{z}.\overline{z'}$ ;

(iii) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ ;

(iv) $\bar{\bar{z}} = z$ ;

(v) $z.\bar{z} = a^2 + b^2$

*Démonstrations*
(i) (ii) (iii) admises
(iv) $\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{a + ib}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$
(v) $z.\bar{z} = (a + ib).(a - ib) = a^2 + b^2$

**Exemples** 1) $\overline{3 - 2i + 7 - 6i} = 3 + 2i + 7 + 6i = 10 + 8i$
2) $\overline{(1 - i)(2 + i)} = (1 + i)(2 - i) = 3 + i$
3) $\overline{(1 - i)^3} = (1 + i)^3 = (1 + i)^2(1 + i) = 2i(1 + i) = -2 + 2i$
4) Soit $z = -2 - 3i$, alors $z.\bar{z} = (-2)^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

### 2.2 Inverse et quotient d’un nombre complexe

**Définitions** Soit $z \ et \ z'$deux nombres complexes
(i) *Inverse* On appelle inverse du nombre complexe $z \neq 0$, le nombre complexe $\frac{1}{z}$ tel que $z.\frac{1}{z} = 1$ ;

(ii) *Quotient* On appelle quotient de $z$ par $z'(z' \neq 0)$ le nombre complexe $\frac{z}{z'} = z.\frac{1}{z'}$.

**Propriétés** Soit $z, z'$deux nombres complexes.
(i) Si $z \neq 0$, $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$ ;

(ii) Si $z' \neq 0$, $\overline{\frac{z}{z'}} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$.

**Méthode pour calculer un inverse et un quotient d'un nombre complexe**

Pour mettre sous forme algébrique un inverse ou un quotient, l'idée est de multiplier en haut en en bas par la forme conjuguée du dénominateur. Pourquoi ? Car la propriété (v)( $z.\bar{z} = a^2 + b^2$) sur les conjugués transforme le dénominateur en un réel.

Soit $z = 2 - 4i$ et $z' = 4 + 3i$.

1) $\frac{1}{z} = \frac{2+4i}{(2-4i).(2+4i)} = \frac{2+4i}{2^2+4^2} = \frac{2+4i}{20} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5}i.$

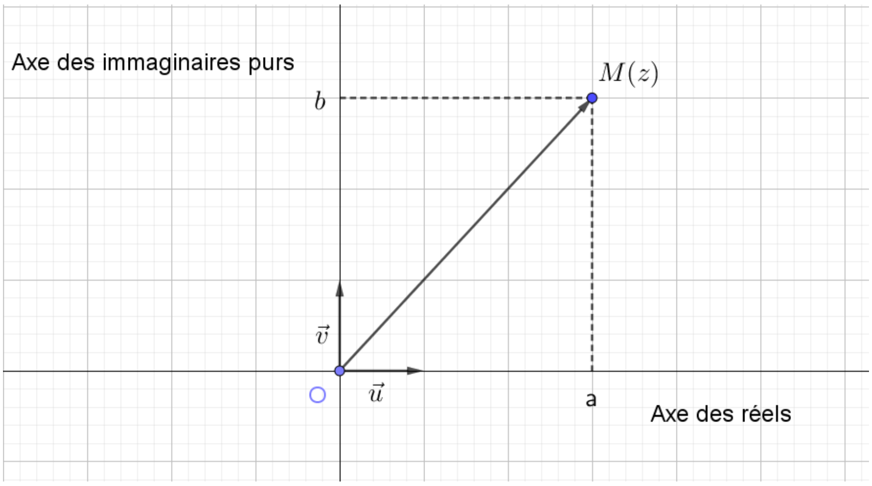
2) $\frac{z}{z'} = \frac{(2-4i).(4-3i)}{(4+3i).(4-3i)} = \frac{-8+6i}{4^2+3^2} = \frac{-8+6i}{25} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i.$

## III Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Dans toute cette partie, on se placera dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

### 3.1 Définitions préliminaires

- Le point image du nombre complexe $z = a + bi$ est le point de coordonnées $(a; b)$ ;
- L'affixe du point M de coordonnées $(a; b)$ est le nombre complexe $z = a + bi$ ;
- Le vecteur image du nombre complexe $z = a + bi$ est le vecteur $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$. On dit que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe le nombre complexe $z$.




### 3.2 Module et argument d'un nombre complexe

**Définitions** Soit $z = a + bi$ un nombre complexe et soit M le point d'affixe $z$.
(i) On appelle module du nombre complexe $z$, que l'on note $|z|$, la distance OM et l'on a : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ;

(ii) On appelle argument du nombre complexe $z$, toute mesure en radian de l'angle $\theta$ défini par $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$. On le note $arg(z)$.

**Propriétés** Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes.
(i) $|z.z'| = |z|.|z'|$
(ii) $z' \neq 0, \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

**Exemples** 1) $\left|\frac{1}{2} - i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

2) $|-2i| = |-2||i| = 2 \times 1 = 2$.

3) $\left|\frac{-1+3i}{4-3i}\right| = \frac{|-1+3i|}{|4-3i|} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

**Attention, $|z + z'| \neq |z| + |z'|$** en effet : $|1 + i| = \sqrt{2} \neq |1| + |i| = 1 + 1 = 2$.

**Propriétés** Soit $z = a + bi$ un nombre complexe. Soit M le point d'affixe $z$ d'argument $\theta$. On pose $r = |z|$.

(i) On a : $\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{|z|}$.

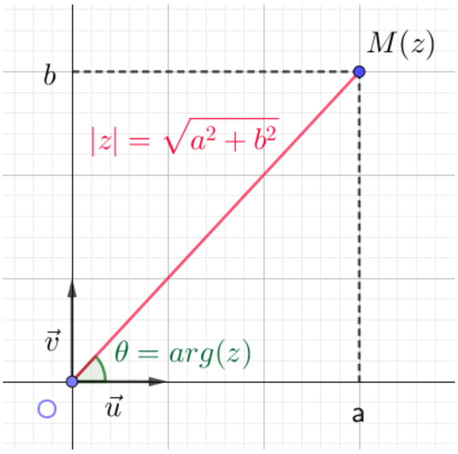
(ii) On a : $z = r(\cos(\theta) + \sin(\theta)\, i)$. Cette expression est appelée forme trigonométrique de $z$

*Démonstration*

(ii) $r(\cos(\theta) + \sin(\theta)\, i) = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|} i\right) = a + bi = z$.

**Remarque** $\arg z$ peut avoir d'autres expressions de la forme $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
On a donc $\arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) + 2k\pi$.

**Figure**




**Exemples – Méthodes**

❖ **Un rappel important : le tableau des valeurs remarquables des cosinus et sinus**

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 |
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 |

❖ **Détermination du module et d'un argument d'un nombre complexe**

Soit $z = 3 + \sqrt{3}i$.

Tout d'abord, on a : $|z| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Puis, $\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$.

D'où $\theta = \arg(z) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

❖ **Détermination de la forme trigonométrique d'un nombre complexe**

Si on reprend l'exemple précédent, on a $z = 2\sqrt{3}(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)i)$ qui est la forme trigonométrique du nombre complexe $z = 3 + \sqrt{3}i$.

❖ **Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique d'un nombre complexe**

On a : $z_1 = 2(\cos(3\pi) + \sin(3\pi)\,i) = -2$

On a : $z_2 = 2(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin(\frac{3\pi}{4})i) = 2\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)i\right) = 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)i\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

## IV <u>Opérations sur l'affixe d'un vecteur</u>

Dans toute cette partie, on se placera dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

**Propriétés** Soit $z_A$ l'affixe du point A et $z_B$ l'affixe du point B. Soit $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ les vecteurs d'affixe $z_1$ et $z_2$.

(i) L'affixe du vecteur somme $\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$ est $z_1 + z_2$ ;

(ii) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ et sa norme est $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = |z_B - z_A|$ ;

(iii) L'affixe du milieu I du segment [AB] est $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$.

**Exemples** Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$ où $z_A = 2 - \frac{1}{2}i$ et $z_B = \frac{3}{2} - i$

1) On a $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = \frac{3}{2} - i - 2 + \frac{1}{2}i = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2) Le milieu $I$ de [AB] a pour affixe $z_I = \frac{2-\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}-i}{2} = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}i$.