Lycée Condorcet

# MPSI - Rentrée 2018

# Préparation en Mathématiques

# Introduction

Ce document est destiné aux étudiants admis en MPSI au Lycée Condorcet pour l'année scolaire 2018-2019. S'appuyant sur l'expérience de ces dernières années dans l'établissement, il a été conçu pour aider ceux qui le souhaitent à se préparer en Mathématiques, **sans caractère obligatoire.**

**S'agissant d'arriver à la rentrée à la fois : reposé, en forme, et motivé, « dans le bain »,**
il est recommandé de profiter pleinement des vacances d'été, tout en optant pour un juste milieu entre les deux attitudes ci-dessous, à éviter :
· ne rien faire du tout (le début d'année risquant, dans ce cas, d'être brutal)
· passer l'été à travailler et à s'avancer (le début d'année risquant, dans ce cas, d'être abordé dans de moins bonnes conditions : manque de recul sur les notions nouvelles abordées seul, fatigue, etc)

Dans cet état d'esprit :

⋄ **il est fortement déconseillé de prendre de l'avance sur le programme de Mathématiques de MPSI.**
En effet, travailler ce programme, passionnant ( !), mais ardu, et consistant, en autodidacte, donc avec peu de recul, et sans l'assurance, en amont, d'une maîtrise suffisante du programme de Terminale, risque d'engendrer de mauvaises habitudes, difficiles à corriger par la suite, notamment concernant les méthodes de travail ou le plan du raisonnement. De ce fait, les meilleurs étudiants en Mathématiques en fin de MPSI sont rarement ceux qui avaient pris le plus d'avance avant la rentrée.

⋄ **par contre, il est recommandé, durant les deux ou trois semaines précédant la rentrée, de consacrer un peu de temps (ce que vous pouvez) à :**

· **consolider ses connaissances en Trigonométrie**

· **renforcer sa maîtrise du Calcul** dans plusieurs domaines des Mathématiques

· **revoir et approfondir certains points précis du programme de Terminale, afin de disposer le plus tôt possible d'idées-clé et/ou automatismes importants en MPSI.**

Dans cette optique, ce document s'articule en trois parties :

• la première, organisée en six chapitres, chaque chapitre comprenant : des rappels de cours et/ou des propriétés spécifiques, des exemples d'illustration importants car très classiques en MPSI, puis des exercices d'entraînement et de préparation

• la deuxième, comprenant les corrigés de tous les exercices proposés dans la première partie

• la troisième, proposée pour les étudiants les plus motivés, comprenant un Problème d'Analyse, « pour le plaisir de faire des Mathématiques », avec les indications nécessaires ; il n'est toutefois raisonnable de l'entamer que si les deux premières parties, sur lesquelles s'appuie réellement la préparation de la rentrée, ont pu être suffisamment travaillées.

**Conseils généraux :**

⋄ **« peu, mais bien » :** en cas de difficulté ou de manque de temps :
· consacrer le temps disponible à un ou deux chapitres, et les travailler comme indiqué plus loin, plutôt que de chercher à tout aborder
· au sein d'un chapitre, travailler sérieusement un ou deux exercices comme indiqué ci-dessous, plutôt que de consulter rapidement tous les corrigés (ce type de démarche ne procurerait aucun profit)

⋄ **« sans calculatrice » :** beaucoup d'épreuves scientifiques aux Concours se déroulant sans calculatrice, il est important de prendre l'habitude de calculer par soi-même, afin d'acquérir une maîtrise suffisante du calcul mental ; d'ailleurs, dans cet objectif, la calculatrice sera interdite aux Devoirs Surveillés de Mathématiques cette année.

## Conseils pour aborder un chapitre :

◇ commencer par lire attentivement les points de cours ; reconsulter sans hésiter son cours de Terminale si besoin

◇ étudier ensuite sérieusement les exemples d'illustration proposés afin de bien s'en approprier le contenu :

· d'une part, ils constitueront souvent des « classiques de MPSI »
· d'autre part, leur compréhension est indispensable pour pouvoir ensuite aborder les exercices en autonomie

→ se munir par exemple d'un brouillon, afin de réécrire les démonstrations en autonomie, en rajoutant si besoin des justifications

◇ passer enfin aux exercices d'entraînement :

• en vue des Concours, la maxime : « je sais ce qu'il faut faire, donc il est inutile que je le fasse, et je passe directement à l'exercice suivant » doit évoluer vers la suivante : « je sais ce qu'il faut faire, donc je le fais, et aussi bien que possible »

• face à un calcul :

· bien avoir à l'esprit qu'il ne s'agit pas d'un concours de vitesse, mais plutôt de justesse ;
prendre le temps, donc, de poser les différentes étapes de son calcul, afin de le comprendre, de limiter les risques d'erreur, et de pouvoir le relire facilement en cas de désaccord avec le corrigé ;

· en cas de désaccord avec le corrigé, justement : celui-ci peut bien sûr contenir des « coquilles » ;
mais en cas d'erreur de votre part, et en vue des Concours, autant identifier cette erreur, et ce qui l'a induite, pour ne pas la reproduire ; il est donc indispensable, dans ce cas, de revoir son calcul et, le cas échéant, de le refaire, avant d'entamer la question suivante.

• face à une question demandant davantage de réflexion : ne consulter le corrigé qu'après avoir cherché la question un minimum de temps, et toujours en s'efforçant de s'en approprier le contenu au maximum.

## Recommandations particulières concernant la Trigonométrie :

◇ la Trigonométrie étant un outil indispensable, non seulement en Mathématiques, mais aussi en Sciences Physiques et en Sciences de l'Ingénieur, une maîtrise insuffisante du sujet est difficilement compatible avec le bon déroulement d'une classe préparatoire scientifique.

◇ « bien connaître sa Trigonométrie » signifie :
· avoir bien en tête les différents types de formules existantes et leurs « allures »
· en connaître par cœur un minimum, afin de pouvoir retrouver rapidement toutes les autres en cas de besoin
· savoir identifier, face à un problème posé, la formule la plus adaptée

◇ dans cet objectif, il est conseillé :
· de commencer par étudier le formulaire proposé : repérer les formules déjà connues, « les autres »(à apprendre à moyen terme), et tâcher de comprendre les liens entre les différents types de formules
· de se lancer ensuite dans les exercices, formulaire à côté, afin de développer son expérience et sa pratique
· de revenir ensuite au formulaire ; il devrait être plus facile, après le travail précédent, de retenir davatange de formules

***

*En espérant que ce document vous aidera à préparer sereinement votre rentrée en MPSI, nous vous souhaitons un excellent été.*

***

# Table des matières

# Première partie

## Rappels, compléments & énoncés des exercices

CHAPITRE 1

# Manipulations calculatoires

## 1.1 Radicaux

**Exercice 1**

Développer, simplifier et regrouper au maximum, l'expression $A = (5\sqrt{3} - 7\sqrt{6})(2\sqrt{8} - 3)$

**Exercice 2**

Simplifier au maximum les expressions ci-dessous à l'aide d'un produit remarquable (attention aux signes) :

$A = (2\sqrt{3} - 3\sqrt{5})^2$
$B = (7\sqrt{2} - 5\sqrt{3})(5\sqrt{3} + 7\sqrt{2})$
$C = (7\sqrt{7} - 5\sqrt{5})(-7\sqrt{7} - 5\sqrt{5})$

$D = (\sqrt{72} - \sqrt{288})(\sqrt{288} - \sqrt{72})$
$E = (2 - \sqrt{3})^n(2 + \sqrt{3})^n$
($n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé)

Rappel - la « technique de l'expression conjuguée » :

◇ *exemples d'expressions conjuguées :*

→ une expression conjuguée de $2 + 3\sqrt{5}$ est $2 - 3\sqrt{5}$
→ une expression conjuguée de $\sqrt{2} - 1$ est $\sqrt{2} + 1$
→ une expression conjuguée de $2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$ est $2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$ (par contre, $-2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$ n'en est pas une)

◇ *principe de la technique :*

☠ un quotient dont le dénominateur comporte des radicaux, comme $\dfrac{4 + 3\sqrt{5}}{3 + 2\sqrt{7}}$, doit être systématiquement réécrit afin que les radicaux du dénominateur disparaissent

⇨ la « technique de l'expression conjuguée » consiste à multiplier le numérateur et le dénominateur du quotient par une expression conjuguée du dénominateur, ce dernier étant alors transformé en une expression de la forme $(a + b)(a - b)$, ie $a^2 - b^2$, ces carrés faisant alors en principe disparaître les radicaux.

◇ *pour aller plus loin :*

→ une technique parallèle pour réécrire les quotients de nombres complexes dans lesquels le dénominateur n'est pas réel (ie « comporte du $i$ ») est exposée dans le chapitre 6
exemple : réécrire $\dfrac{3 - 2i}{5 + 4i}$ sous la forme d'un quotient dont le dénominateur est réel

→ une technique parallèle pour lever certaines formes indéterminées est exposée au chapitre 3
exemple 1 : déterminer la limite, lorsque $x \to +\infty$ de $\sqrt{x^2 + 1} - x$
exemple 2 : déterminer la limite, lorsque $x \to +\infty$ de $\sqrt{x^4 + 3x^2} - x^2$

**Exercice 3**

Réécrire les expressions ci-dessous sans radical au dénominateur :

$A = \dfrac{1}{5 - 2\sqrt{2}}$ $\quad B = \dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5} + 1}$ $\quad C = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{5\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}$

**Exercice 4**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier l'écriture des quantités $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

**Exercice 5**

Simplifier les expressions ci-dessous après avoir considéré leur carré :

$A = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ $\qquad$ $B = \sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}$

**Exercice 6**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels tels que $0 \leqslant b \leqslant a$.

1) calculer le carré de l'expression $\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}} + \sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}$

2) en déduire les égalités : $\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{14}$ et $\sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}} = \sqrt{14}$

## 1.2 Puissances

Rappel - règles de calcul concernant les puissances :

$x$ et $y$ désignant des réels quelconques non nuls :

- *puissance négative :* *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $x^{-n} \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{1}{x^n}$
- *pour tous* $n, m \in \mathbb{Z}$ : $x^{n+m} = x^n x^m$ $\qquad$ $x^{n-m} = \dfrac{x^n}{x^m}$
- *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ : $(xy)^n = x^n y^n$ $\qquad$ $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$
- *pour tous* $n, m \in \mathbb{Z}$ : $(x^n)^m = x^{nm}$ $\qquad$ *(et non* $x^{(n^m)}$, *source d'erreur fréquente)*
- *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ : $(-x)^n = \begin{cases} x^n & \text{si n est pair} \\ -x^n & \text{si n est impair} \end{cases}$

**Exercice 1**

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ deux réels non nuls. Simplifier au maximum les expressions ci-dessous :

$A = \left[(a^2b^3)^4\right]^5$ $\qquad$ $B = \left(a^3b^{-4}\right)^2 . \left(-2a^{-5}b^6\right)^3$ $\qquad$ $C = \left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^2 . \left(\dfrac{a}{4b}\right)^3 . \left(\dfrac{b^2}{a}\right)^2$ $\qquad$ $D = \left(\dfrac{a^1b^{-2}}{a^{-3}b^4}\right)^5 . \left(\dfrac{a^{-6}b^5}{a^4b^{-3}}\right)^3$

**Exercice 2**

Simplifier au maximum les quantités ci-dessous :

$A = (-4)^{60} \times (-0.125)^{41}$ $\qquad$ $B = 40^{71} \times (1.25)^{48} \times 10^{-119}$

**Exercice 3**

Simplifier au maximum les quantités ci-dessous :

$A = \dfrac{8^{73} \times 3^{-31}}{9^{-15} \times 2^{220}}$ $\qquad$ $B = \dfrac{(5^2 \times 10^{-5})^3}{(5 \times 10^{-3})^5} \times \left(\dfrac{10^2}{5}\right)^2$ $\qquad$ $C = \dfrac{(5^2 \times 11^{-5})^{-3}}{(11^5 \times 5^{-3})^2} \times \left[\dfrac{(11 \times 5)^2}{5^2 \times 11^4}\right]^3$

$D = \dfrac{(4^7 \times 3^{-12})^2}{(4^{-1} \times 3^6)^{-5}} \div \dfrac{(4^3 \times 3^{-2})^5}{(4^{-2} \times 3^5)^{-3}}$

CHAPITRE 2

# Trigonométrie

## 2.1 Formulaire

◇ *cercle trigonométrique, noté ici $\mathscr{C}$ :*

les compétences ci-dessous sont supposées acquises ; dans le cas contraire, il est nécessaire de combler ses lacunes :

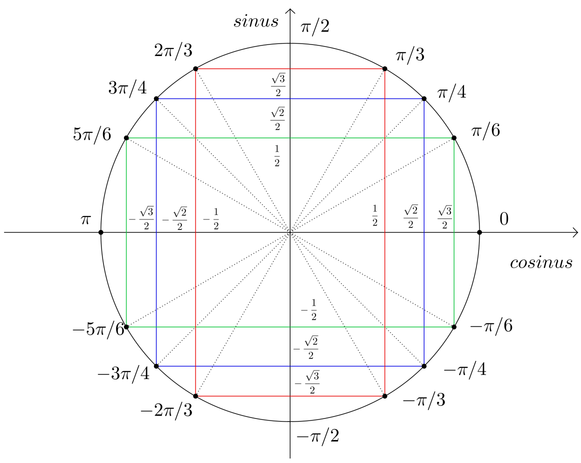
- sens direct
- visualisation de $\cos x$ et $\sin x$ sur les axes, étant donné un point $M(x) \in \mathscr{C}$
- situation précise sur $\mathscr{C}$ des points :
  - d'une part : $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $M\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $M(\pi)$, $M\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
  - d'autre part : $M\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $M\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $M\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $M\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $M\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$, $M(-\pi)$, $M\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$
- situation précise sur $\mathscr{C}$ des points $M\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $M\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$, $M(\pi-x)$, et $M(\pi+x)$, étant donné $M(x) \in \mathscr{C}$

◇ *fonctions sinus et cosinus :*

les propriétés ci-dessous concernant ces deux fonctions sont supposées connues (mêmes recommandations) :
périodicité, parité, dérivées, valeurs remarquables, variations, courbes représentatives.

◇ *valeurs remarquables :*

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-1$ |
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $0$ |




*N.B. maîtriser ce tableau signifie aussi savoir compléter rapidement des égalités du type :* $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\dots)$

◇ *résolution d'équations - schémas de raisonnement à comprendre & connaître par cœur :*

• étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, les équations ci-dessous, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, se résolvent selon la démarche indiquée ; les assertions se visualisent sans difficulté sur le cercle trigonométrique ;
dans chacun des cas, la seconde assertion est une reformulation, en termes de congruences, de la première.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\cos x = \cos\alpha$ | $\iff$ | $(\exists k \in \mathbb{Z},\ x = \alpha + 2k\pi)$ ou $(\exists k \in \mathbb{Z},\ x = -\alpha + 2k\pi)$ |
| soit : | $\cos x = \cos\alpha$ | $\iff$ | $x \equiv \alpha\ [2\pi]$ ou $x \equiv -\alpha\ [2\pi]$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\sin x = \sin\alpha$ | $\iff$ | $(\exists k \in \mathbb{Z},\ x = \alpha + 2k\pi)$ ou $(\exists k \in \mathbb{Z},\ x = \pi - \alpha + 2k\pi)$ |
| soit : | $\sin x = \sin\alpha$ | $\iff$ | $x \equiv \alpha\ [2\pi]$ ou $x \equiv \pi - \alpha\ [2\pi]$ |

• *cas particuliers, dans lesquels les congruences « fusionnent » :*

| | | |
|---|---|---|
| $\cos x = 0$ | $\iff$ | $x \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ |
| $\cos x = 1$ | $\iff$ | $x \equiv 0\ [2\pi]$ |
| $\cos x = -1$ | $\iff$ | $x \equiv \pi\ [2\pi]$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\sin x = 0$ | $\iff$ | $x \equiv 0\ [\pi]$ |
| $\sin x = 1$ | $\iff$ | $x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ |
| $\sin x = -1$ | $\iff$ | $x \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ |

◇ *formules à connaître par cœur impérativement :*

→ *formules élémentaires (se visualisent sur le cercle trigonométrique) :*

$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\cos(-x) = \cos x$ | $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ | $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ | $\cos(x + \pi) = -\cos x$ |
| $\sin(-x) = -\sin x$ | $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$ | $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ | $\sin(x + \pi) = -\sin x$ |

→ *formules d'addition* (à connaître impérativement, elles entraînent toutes les autres) *et duplication* :

$$\begin{array}{|lcl|}\hline \cos(a+b) & = & \cos a\cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) & = & \cos a\cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) & = & \sin a\cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) & = & \sin a\cos b - \cos a \sin b \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|lcl|}\hline \cos 2x & = & \cos^2 x - \sin^2 x \\ \cos 2x & = & 2\cos^2 x - 1 \\ \cos 2x & = & 1 - 2\sin^2 x \\ \hline \sin 2x & = & 2\sin x \cos x \\ \hline \end{array}$$

→ *formules de linéarisation* :

$$\begin{array}{|lcl|}\hline \cos a \cos b & = & \dfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \sin a \sin b & = & \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \sin a \cos b & = & \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|l|}\hline \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} \text{ ou } 1 + \cos x = 2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) \\ \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} \text{ ou } 1 - \cos x = 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right) \\ \hline \end{array}$$

→ *transformations de sommes en produits (moins connues, ces formules s'établissent par exemple à partir des formules d'addition, ou bien en utilisant les nombres complexes) :*

$$\begin{array}{|lcl|lcl|}\hline \sin p + \sin q & = & 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right) & \cos p + \cos q & = & 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \\ \sin p - \sin q & = & 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right) & \cos p - \cos q & = & -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \\ \hline \end{array}$$

## 2.2 Exercices

**Exercice 1**

1. Rappeler la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$
2. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ en utilisant une formule de linéarisation.
3. Déterminer alors la valeur de $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

**Exercice 2**

1. (a) Simplifier $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$
   (b) En déduire une première expression de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$
2. En procédant comme dans l'exercice précédent, déterminer une seconde expression de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$
3. Vérifier dans chacun des cas l'égalité des deux expressions obtenues.

**Exercice 3**

1. (a) Rappeler l'expression de $\cos(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$
   (b) Déterminer une expression de $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ du même type, en utilisant une formule d'addition.
   (c) Rappeler l'expression de $\sin(2\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$
   (d) Déterminer une expression de $\sin(3\theta)$ de la forme $\sin(\theta)\times$ « expression fonction de $\cos\theta$ » en procédant comme en 1. (b).
2. A l'aide des questions précédentes, établir : $\cos(5\theta) = 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta)$

3. Dans cette question, on note $u = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$
   (a) Justifier que $16u^5 - 20u^3 + 5u = 0$
   (b) Résoudre l'équation du second degré $(E) : 16x^2 - 20x + 5 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$
   (c) En déduire deux valeurs possibles pour $u$
   (d) Justifier que $u > \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et vérifier que $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$
   (e) En déduire : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$
4. Déterminer alors successivement la valeur des nombres : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

## Exercice 4

1. Etablir : $\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$ (on pourra commencer par observer : $\cos^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2$ )
   *remarque : on a ici « linéarisé » $\cos^4(x)$ ( disparition des puissances, au prix de l'apparition de multiples de l'angle $x$)*
2. En déduire :
   (a) une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fontion $x \longmapsto \cos^4 x$.
   (b) la valeur de l'intégrale $\int_0^{2\pi} \cos^4 x \, \mathrm{d}x$

   *remarque : cette deuxième question met en évidence l'utilité de la technique de linéarisation : celle-ci peut parfois permettre de débloquer un calcul de primitive (ou dérivée) et donc d'intégrale.*

## Exercice 5

1. (a) Compléter : $\cos(5x) + \sin(5x) = \sqrt{2}\cos(5x - \dots)$
   *remarque : ce type d'initiative, consistant à écrire, ici, $1 = \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$, pour faire apparaître une valeur trigonométrique remarquable, est fréquent ; on le rencontre par exemple aussi avec les nombres complexes (technique de « mise en facteur du module »)*
   (b) Compléter alors les assertions ci-dessous :

   *(exemple de résolution d'une équation en raisonnant par équivalences)*
   $\cos(5x) + \sin(5x) = 0 \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $5x - \dots = \dots$
   " $\iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \dots$
   d'où : $\mathscr{S} = \{ \dots , k \in \mathbb{Z}\}$ *(lire : ensemble des nombres de la forme ... lorsque $k$ décrit $\mathbb{Z}$)*
2. Résoudre à présent en autonomie l'équation $\mathscr{E}_2$ : $\sqrt{3}\sin(2x) - \cos(2x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

## Exercice 6

1. *Résolution guidée d'une équation trigonométrique.*
   Compléter la série d'équivalences ci-dessous ainsi que la conclusion finale :

   $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\left(3x + \frac{\pi}{3} = \left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + 2k\pi\right)$ ou ( ... )
   " $\iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(4x = \dots + 2k\pi)$ ou ( ... )
   " $\iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(x = \dots)$ ou $(x = \dots)$
   d'où : $\mathscr{S} = \{ \dots , k \in \mathbb{Z}\} \cup \{ \dots , k \in \mathbb{Z}\}$
2. Résoudre à présent en autonomie l'équation $\mathscr{E}_2 : \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre à présent en autonomie l'équation $\mathscr{E}_3 : \sin(3x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

CHAPITRE 3

# Calculs de Limites

## 3.1 Généralités - rappels & compléments

◇ *les points ci-dessous sont supposés maîtrisés ; dans le cas contraire, il est nécessaire de combler ses lacunes.*

• limite d'une fonction usuelle ($x \longmapsto x^n$, $x \longmapsto \frac{1}{x^n}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$, $\sin$, $\cos$, $\exp$, $\ln$) en tout point du domaine de définition, ou en une extrémité de celui-ci
• limite d'une somme & forme indéterminée « $(+\infty) + (-\infty)$ »
• limite d'un produit & forme indéterminée « $\infty \times 0$ »
• limite d'un quotient & formes indéterminées « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » et « $\dfrac{0}{0}$ »
• mise en facteur du/des terme(s) de plus haut degré afin de déterminer la limite d'une fonction polynomiale ou rationnelle en $\pm\infty$

◇ *limites de références issues d'un taux d'accroissement (à connaître par cœur) :*

• rappel : étant donnée une fonction $f$, définie au voisinage de $0$, $0$ inclus, et dérivable en $0$, selon la définition de la dérivabilité et du nombre dérivé en $0$ : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) \quad (*)$
• dans le cas particulier de la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x)$, définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$, de dérivée $f' : x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ (noter que $f(0)=0$ et $f'(0)=1$), $(*)$ se réécrit : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
on obtient ainsi une première limite de référence, réglant une forme indéterminée de type « $\dfrac{0}{0}$ »
• les deux autres limites de référence figurant dans le tableau ci-dessous s'obtiennent de la même manière, avec les fonctions $x \longmapsto e^x$ et $x \longmapsto \sin x$ :

| | | |
|---|---|---|
| $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ | $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ | $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ |

◇ *limites de référence exprimant des résultats de croissances comparées (à connaître par cœur) :*

• *$n$ désignant dans le tableau ci-dessous un entier naturel non nul :*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ | $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ | $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x^n \ln x = 0$ | $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ |

• expliquons l'« état d'esprit » accompagnant ces limites, en considérons, pour commencer, la première :

· lorsque $x \to +\infty$, les deux quantités $\ln x$ et $x^n$ tendent vers $+\infty$ ; on peut alors souhaiter comparer leurs vitesses de divergence ; l'attitude classique est alors de former le quotient des deux quantités, puis déterminer sa limite (ici lorsque $x \to +\infty$), en réglant la forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » associée.

· la propriété « $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ » signifie donc que lorsque $x \to +\infty$, $x^n$ tend vers $+\infty$ « plus vite »que $\ln x$,

• de manière plus formelle, on dira cette année, de manière équivalente :
« lorsque $x \to +\infty$, $x^n$ est prépondérant devant $\ln x$ »ou « lorsque $x \to +\infty$, $\ln x$ est négligeable devant $x^n$ »
En tout cas, on comprend désormais mieux le terme de « croissances comparées » employé ici.

• N.B. les deux dernières limites du tableau expriment également des propriétés de croissances comparées, puisque :

· d'une part : $x^n \ln x = \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^n}}$, avec, lorsque $x \to 0^+$ : $|\ln x| \to +\infty$ et $\dfrac{1}{x^n} \to +\infty$

· d'autre part : $x^n e^x = \dfrac{x^n}{e^{-x}}$, avec, lorsque $x \to -\infty$ : $|x^n| \to +\infty$ et $e^{-x} \to +\infty$

◇ *complément - composition de limites :*

dans les exercices ci-après, on se contentera de mettre en œuvre l'idée générale exposée ci-dessous, sans chercher à entrer dans des considérations trop techniques (une « vraie » proposition à ce sujet, plus formelle et plus précise, sur ce point, sera établie cette année) :

> · *$f$ désignant une fonction définie au voisinage d'un point $a$, réel ou égal à $\pm\infty$,*
> · *$g$ désignant une fonction définie au voisinage d'un point $b$, réel ou égal à $\pm\infty$,*
> · *$\ell$ désignant un nombre réel, ou $\pm+\infty$ :*
>
> si : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell \end{cases}$, alors : $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \ell$

les deux exemples ci-dessous montrent à présent comment combiner les différents résultats rencontrés afin de lever certaines formes indéterminées :

*Exemple 1 : on souhaite étudier la limite en $0$ de la quantité $\dfrac{e^{2x}-1}{x^2}$ lorsque $x \to 0$*

· *on est en présence d'une forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ »*

· *afin de la lever, réécrivons la quantité en faisant apparaître des limites de références et des composées :*

$$\frac{e^{2x}-1}{x^2} = \frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot \frac{2x}{x^2} = \frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot \frac{2}{x}$$

*or :* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} 2x = 0 \\ \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{e^y-1}{y} = 1 \end{cases}$, *donc, par composition :* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{2x} = 1$

*d'où, par produit :* $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \dfrac{e^{2x}-1}{x^2} = -\infty$ *et :* $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \dfrac{e^{2x}-1}{x^2} = +\infty$

*Exemple 2 : on souhaite étudier la limite en $0$ de la quantité $\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$ lorsque $x \to 0$, l'énoncé suggérant d'utiliser l'identité $\cos^2 = 1 - \sin^2$ :*

· *on est en présence d'une forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ »*

· *afin de la lever, réécrivons la quantité dans le même état d'esprit que dans l'exemple précédent :*

$$\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\ln(\cos^2 x)}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(1-\sin^2 x)}{x^2},$$

*donc :* $\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\ln(1-\sin^2 x)}{-\sin^2 x}\cdot\dfrac{\sin^2 x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\ln(1-\sin^2 x)}{-\sin^2 x}\cdot\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$

*or :* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \sin^2 x = 0 \\ \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1 \end{cases}$, *donc, par composition :* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-\sin^2 x)}{-\sin^2 x} = 1$

*et :* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, *d'où, par produit :* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

**Exercice 1**

Etudier la limite en $0$ des quantités ci-dessous :

1. $\dfrac{\sin(ax)}{x}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$
2. $\dfrac{\ln(1+ax)}{x}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$
3. $\dfrac{e^{ax}-1}{x}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$
4. $\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$ $(a, b \in \mathbb{R}^*$ distincts$)$
5. $\dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ $(a, b \in \mathbb{R}^*$ distincts$)$
6. $\dfrac{\ln(1+ax)}{\sin(bx)}$ $(a, b \in \mathbb{R}^*$ distincts$)$

**Exercice 2**

1. Etudier la limite en $0$ de la quantité $\dfrac{x}{e^{\sin x}-1}$
2. Etudier la limite en $0$ de la quantité $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ (utiliser une formule de trigonométrie adaptée)
3. Etudier la limite en $+\infty$ de la quantité $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
4. Etudier la limite en $+\infty$ de la quantité $x^2 e^{-\sqrt{x}}$
5. Etudier la limite en $+\infty$ de la quantité $x \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$
6. Etudier la limite en $+\infty$ de la quantité $x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

## 3.2 La technique de « mise en facteur du terme prépondérant »

*contexte type d'utilisation :*

◇ *cette technique permet tout d'abord de lever les formes indéterminées du type « $(+\infty)+(-\infty)$ » lorsque les quantités en jeu sont d'ordres de grandeur différents, ainsi que les situations qui s'y ramènent (somme d'un nombre quelconque de quantités tendant vers $\pm\infty$ d'ordres de grandeur différents)*

➪ *dans ce cas, elle consiste à réécrire l'expression en effectuant une « factorisation forcée » par le terme d'ordre de grandeur prépondérant.*

◇ *cette technique permet également de lever les formes indéterminées que l'on peut rencontrer dans des quotients lorsque le numérateur et le dénominateur sont du type précédent.*

➪ *dans ce cas, elle consiste à réécrire l'expression en effectuant une « factorisation forcée » au numérateur et au dénominateur, par les termes d'ordre de grandeur prépondérant respectifs.*

*Exemple 1 : on souhaite étudier la limite en $-\infty$ de la quantité* $\dfrac{3x^4-5x^3+7}{2x^3-6x^2-1}$

$$\frac{3x^4-5x^3+7}{2x^3-6x^2-1} = \frac{x^4\cdot\left(3-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^4}\right)}{x^3\cdot\left(2-\frac{6}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}, \quad \textit{donc :} \quad \frac{3x^4-5x^3+7}{2x^3-6x^2-1} = x\cdot\frac{\left(3-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^4}\right)}{\left(2-\frac{6}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$\textit{or :} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(3-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^4}\right)}{\left(2-\frac{6}{x}-\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{3}{2}, \quad \textit{donc, par produit :} \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4-5x^3+7}{2x^3-6x^2-1} = -\infty$$

*Exemple 2 : on souhaite étudier la limite en $+\infty$ de la quantité* $3x^2\cdot\ln x - 4x^3 + \sqrt{x}\cdot\sin x$

$$3x^2\cdot\ln x - 4x^3 + \sqrt{x}\cdot\sin x = x^3\cdot\left(3\frac{\ln x}{x} - 4 + \frac{\sin x}{x^2\sqrt{x}}\right)$$

$$\textit{or :} \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x^2\sqrt{x}} = 0 \end{cases}, \quad \textit{donc, par somme, puis produit :} \lim_{x\to+\infty}\left(3x^2\cdot\ln x - 4x^3 + \sqrt{x}\cdot\sin x\right) = -\infty$$

**Exercice**

1. Etudier la limite en $+\infty$ de la quantité $3x^2 - 4\ln x + e^{5x}$
2. Etudier la limite en $+\infty$ de la quantité $3e^{2x} - 2e^{3x}$
3. Etudier la limite en $+\infty$ de la quantité $\dfrac{x^4 - 5\ln x + 2e^x}{x^4 - 2e^x + 3\sqrt{x}}$
4. Etudier la limite en $\pm\infty$ de la quantité $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
5. Etudier la limite en $\pm\infty$ de la quantité $\dfrac{\sqrt{x^2-1}+3x}{\sqrt{x^2+1}}$
6. Etudier la limite en $+\infty$ de la quantité $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$

## 3.3 La technique de « l'expression conjuguée »

*contexte type d'utilisation :*

◇ *cette technique permet de lever certaines formes indéterminées du type « $(+\infty) - (+\infty)$ » :*
*- d'une part, lorsque les deux quantités en jeu sont du même ordre de grandeur (la technique de mise en facteur du terme prépondérant étant alors inefficace),*
*- et, d'autre part, lorsqu'au moins une des deux quantités en jeu comporte un radical.*

⇨ *elle consiste à multiplier et diviser l'expression par son expression conjuguée, l'apparition d'une quantité de la forme $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ permettant souvent (mais pas toujours) de lever l'indétermination après des simplifications.*

*Exemple :* *on souhaite étudier la limite en $+\infty$ de la quantité $\sqrt{x^2+3x} - x$*

· *on est en présence d'une forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$, dans laquelle les deux quantités en jeu, $\sqrt{x^2+3x}$ et $x$, sont du même ordre de grandeur ($x$)*

· *la technique de mise en facteur du terme prépondérant (ici $x$) est ici inefficace, puisqu'elle conduit à écrire :* $\sqrt{x^2+3x} - x = x \cdot \left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x}} - 1\right)$,
*ceci transformant la forme indéterminée initiale en une nouvelle forme indéterminée : « $\infty \times 0$ »*

· *utilisons plutôt la technique de l'expression conjuguée :*
$$\sqrt{x^2+3x} - x = \frac{(x^2+3x) - x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x},$$
*d'où, en divisant le numérateur et le dénominateur par $x$ :* $\sqrt{x^2+3x} - x = \dfrac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}$,
*puis (il n'y a plus de forme indéterminée), par somme puis quotient :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x} - x\right) = \dfrac{3}{2}$

**Exercice 1**

1. Etudier la limite en $+\infty$ de la quantité $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$
2. Etudier la limite en $+\infty$ de la quantité $x - \sqrt{x^2+x}$
3. Etudier la limite en $+\infty$ de la quantité $\sqrt{x^2+4x+3} - x$
4. Etudier la limite en $-\infty$ de la quantité $\sqrt{x^2+4x+3} + x$

**Exercice 2**

1. Déterminer la limite en $0$ de la quantité $\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ en utilisant la technique de l'expression conjuguée.
2. Etablir le même résultat en interprétant la quantité en termes de taux d'accroissement.

## 3.4 Expressions $u(x)^{v(x)}$ & technique de « mise sous forme exponentielle »

◇ *notation $a^b$ (généralisation de la notion de puissance) :*

• pour tous $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$, on note $a^b = e^{b\ln a}$
• il s'agit d'une extension de la notion de puissance au cas d'un exposant non nécessairement entier
• la plupart des règles de calcul connues sur les puissances, dans le cas d'exposants entiers, s'étendent dans le cas d'exposants quelconques (démonstrations sans difficulté en utilisant les règles de calcul élémentaires sur ln et exp)

◇ *attention : apparition de trois nouvelles formes indéterminées*

étudier la limite d'expressions de la forme $u(x)^{v(x)}$ suppose de connaître trois formes indéterminées spécifiques :

| | | |
|---|---|---|
| « $1^\infty$ » (en effet, « $1^\infty = e^{\infty\times 0}$ ») | « $0^0$ » (en effet, « $0^0 = e^{0\times\infty}$ ») | « $\infty^0$ » (en effet, « $\infty^0 = e^{0\times\infty}$ ») |

◇ *la technique de « mise sous forme exponentielle » :*

*contexte type d'utilisation :*

◇ *on utilise systématiquement cette technique lorsque, souhaitant déterminer la limite d'une expression de la forme $u(x)^{v(x)}$, on se heurte à l'une des trois formes indéterminées précédentes : « $1^\infty$ », « $0^0$ », ou « $\infty^0$ »*

➩ *cette technique consiste à réécrire la quantité sous forme exponentielle : $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$,*
*puis déterminer la limite de la quantité figurant dans l'exponentielle par les moyens usuels,*
*avant de conclure en composant par exp.*

*Exemple 1 : on souhaite déterminer la limite en $0^+$ de la quantité $x^x$*

· *on est en présence d'une forme indéterminée du type « $0^0$ »*

· *pour la lever, réécrivons la quantité :* $x^x = e^{x\ln x}$

*or :* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x = 0$, *donc, par composition :* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^x = e^0 = 1$

*Exemple 2 : on souhaite déterminer la limite en $+\infty$ de la quantité $(1+\frac{1}{x})^x$*

· *on est en présence d'une forme indéterminée du type « $1^\infty$ »*

· *pour la lever, réécrivons la quantité :* $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

*or :* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1 \end{cases}$, *donc, par composition :* $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1$, *puis :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$

## Exercice 1 - la forme indéterminée « $1^\infty$ »

On va rencontrer ci-dessous plusieurs issues possibles pour une forme indéterminée du type « $1^\infty$ ».

1. Etudier la limite en $+\infty$ de la quantité $\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x \quad (a \in \mathbb{R})$
2. Etudier la limite en $+\infty$ de la quantité $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$
3. Etudier la limite en $+\infty$ de la quantité $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

## Exercice 2 - la forme indéterminée « $0^0$ »

On va rencontrer ci-dessous plusieurs issues possibles pour une forme indéterminée du type « $0^0$ ».

1. Etudier la limite en $0^+$ de la quantité $(\sin x)^x$
2. Etudier la limite en $0^+$ de la quantité $x^{\frac{a}{\ln x}} \quad (a \in \mathbb{R}_+^*)$
3. Etudier la limite en $0^+$ de la quantité $x^{\frac{1}{\sqrt{|\ln x|}}}$
4. Etudier la limite en $0^+$ de la quantité $x^{-\frac{1}{\sqrt{|\ln x|}}}$

## Exercice 3 - la forme indéterminée « $\infty^0$ »

On va rencontrer ci-dessous plusieurs issues possibles pour une forme indéterminée du type « $\infty^0$ ».

1. Etudier la limite en $+\infty$ de la quantité $x^{\frac{1}{x}}$
2. Etudier la limite en $+\infty$ de la quantité $x^{\frac{a}{\ln x}} \quad (a \in \mathbb{R}^*)$
3. Etudier la limite en $+\infty$ de la quantité $x^{\frac{1}{\sqrt{\ln x}}}$
4. Etudier la limite en $+\infty$ de la quantité $x^{-\frac{1}{\sqrt{\ln x}}}$

CHAPITRE 4

# Calculs de Dérivées

## 4.1 Formulaire

◇ *opérations algébriques de base :*

*$u$ et $v$ désignant des fonctions numériques définies et dérivables sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ non réduit à un point :*

| opération | $f(x)$ | $f'(x)$ | remarques |
|---|---|---|---|
| somme | $u(x)+v(x)$ | $u'(x)+v'(x)$ | |
| comb.lin. | $\lambda u(x)+\mu v(x)$ | $\lambda u'(x)+\mu v'(x)$ | $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ (constantes, i.e. indépendantes de la variable $x$) |
| produit | $u(x)v(x)$ | $u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ | |
| inverse | $\dfrac{1}{u(x)}$ | $-\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$ | *(condition : $u$ ne s'annulant pas sur $I$)* |
| quotient | $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ | $\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$ | *(condition : $v$ ne s'annulant pas sur $I$)* |

◇ *dérivées usuelles :*

| dérivées usuelles | | | dérivées composées correspondantes | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $f'(x)$ | domaine(s) | $f(x)$ | $f'(x)$ | condition |
| $x^n\ (n \in \mathbb{Z}^*)$ | $nx^{n-1}$ | $\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ \mathbb{R}^* & \text{si } n \in \mathbb{Z}^*_- \end{cases}$ | $u(x)^n\ (n \in \mathbb{Z}^*)$ | $nu(x)^{n-1} \cdot u'(x)$ | $u$ ne s'annulant pas si $n < 0$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ | $\frac{1}{u(x)}$ | $-\frac{1}{u(x)^2} \cdot u'(x)$ | $u$ ne s'annulant pas |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0, +\infty[$ | $\sqrt{u(x)}$ | $\frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \cdot u'(x)$ | $u$ à valeurs strictement positives |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\mathbb{R}$ | $\sin(ax+b)$ | $a \cdot \cos(ax+b)$ | $a, b \in \mathbb{R}$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\mathbb{R}$ | $\cos(ax+b)$ | $-a \cdot \sin(ax+b)$ | $a, b \in \mathbb{R}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\mathbb{R}$ | $e^{u(x)}$ | $e^{u(x)} \cdot u'(x)$ | |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | $]0, +\infty[$ | $\ln u(x)$ | $\frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$ | $u$ à valeurs strictement positives |

◇ *pour aller plus loin - dérivée d'une fonction composée :*

• la propriété ci-dessous :

« étant donnée une fonction $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et deux réels $a$ et $b$,
la fonction $\varphi : x \longmapsto \varphi(x) = u(ax+b)$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\varphi'(x) = a \cdot u'(ax+b)$ »

est un cas particulier d'un résultat plus général, que l'on expose dans les paragraphes suivants.
Ceci nécessite toutefois de clarifier, préalablement, la notion de fonction composée.

• *fonction composée :*

Définition/Notation :

Soient : · $I$, $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ non réduits à un point
· $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $I$ et à valeurs dans $J$
· $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $J$

On note $g \circ f$ (lire : « $g$ rond $f$ ») la fonction : $\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (g \circ f)(x) \overset{\text{déf.}}{=} g(f(x)) \end{array}$

Une fonction de ce type est appelée *fonction composée*

Exemple 1 : *si l'on considère les fonctions* $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

$\longrightarrow$ $g \circ f$ est bien définie ; il s'agit de la fonction : $\begin{array}{rcl} g \circ f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (e^x)^2 = e^{2x} \end{array}$

$\longrightarrow$ $f \circ g$ est également bien définie ; il s'agit de la fonction : $\begin{array}{rcl} f \circ g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{(x^2)} = e^{x^2} \end{array}$

*remarque : cet exemple met en évidence le fait que lorsque les deux fonctions composées $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bien définies, elles ne coïncident pas en général.*

*Exemple 2 : en reprenant les notations du formulaire précédent,*

la fonction $\varphi$ n'est autre que $u \circ \psi$, où $\psi$ est la fonction : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax + b \end{array}$

• *expression de la dérivée d'une fonction composée quelconque :*

le résultat ci-dessous, très utile, sera démontré cette année ; de nombreux cas particuliers en ont été rencontrés au lycée (cf tableau précédent), on peut donc à présent l'exposer :

*Proposition :*

*Soient :* · $I$, $J$ *deux intervalles de* $\mathbb{R}$ *non réduits à un point*
· $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions*
*On suppose :* · $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *dérivable sur* $I$ *et à valeurs dans* $J$
· $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *dérivable sur* $J$

*Alors, la fonction $g \circ f$ est bien définie et dérivable sur $I$, avec, pour tout $x \in I$ :* $(g \circ f)'(x) = \underbrace{g'(f(x))}_{g' \text{evaluee en } f(x)} \times f'(x)$

*Avant de poursuivre, il est conseillé de prendre un moment pour comparer, sur chaque ligne du formulaire précédent, les deux formules, afin de réaliser comment la seconde s'obtient à partir de la première et du résultat cité à l'instant.*

*Exemple 1 : pour toute fonction $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ :*

• $\cos$ *étant dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition, la fonction $\varphi : x \longmapsto \cos u(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec* $\varphi'(x) = -\sin u(x) \cdot u'(x)$
• $\sin$ *étant dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition, la fonction $\psi : x \longmapsto \sin u(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec* $\psi'(x) = \cos u(x) \cdot u'(x)$

*Exemple 2 : considérons la fonction* $\begin{array}{rcl} \varphi : ]0, +\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(\ln x) \end{array}$

*la fonction $\ln$ étant dérivable sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, sur lequel la fonction $\cos$ est dérivable, par composition, $\varphi$ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, avec* $\varphi'(x) = -\sin(\ln x) \cdot \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\sin(\ln x)}{x}$

## 4.2 Exercices

### Exercice 1 - opérations algébriques de base

Dériver formellement les expressions ci-dessous (c'est-à-dire sans se préoccuper des questions des domaines de définition ou dérivabilité), en veillant à simplifier les résultats au maximum :

1. $f(x) = x\ln x - x$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ *(à savoir donner rapidement)*
3. $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *(fonction homographique)*
4. $f(x) = \dfrac{2x^2-5x+3}{(x-3)^2}$
5. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
6. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$
7. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ *(fonction tangente)*
8. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ *(fonction cotangente)*
9. $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

### Exercice 2 - dérivées composées au programme de Terminale

Dériver formellement les expressions ci-dessous, en veillant à simplifier les résultats au maximum :

1. $f(x) = \sin^5 x$
2. $f(x) = \cos^4 x$
3. $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$
4. $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x + 3}$
5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$
6. $f(x) = e^{x^2-3x+4}$
7. $f(x) = e^{\sqrt{x^2-x+1}}$
8. $f(x) = \ln(\sin x)$
9. $f(x) = \ln(\cos x)$
10. $f(x) = \ln(e^x+1)$
11. $f(x) = \ln(\ln x)$
12. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ *(on peut obtenir une expression très simple)*

### Exercice 3 - exemples de dérivées composées généralisées

Dériver formellement les expressions ci-dessous (c'est-à-dire sans se préoccuper des questions des domaines de définition ou dérivabilité), en veillant à simplifier les résultats au maximum :

1. $f(x) = \sin(x^2)$
2. $f(x) = \cos(\sqrt{x})$
3. $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
4. $f(x) = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$

Notation $a^b$ (généralisation de la notion de puissance) :

- pour tous $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$, on note $a^b = e^{b\ln a}$
- il s'agit d'une extension de la notion de puissance au cas d'un exposant non nécessairement entier
- la plupart des règles de calcul connues sur les puissances, dans le cas d'exposants entiers, s'étendent dans le cas d'exposants quelconques (démonstrations sans difficulté en utilisant les règles de calcul élémentaires sur ln et exp)

### Exercice 4 - pour aller plus loin - dérivée d'une fonction de la forme $x \longmapsto u(x)^{v(x)}$

1. Soient : $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point
   $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $I$ et à valeurs strictement positives
   $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fontion dérivable sur $I$

   On peut donc définir la fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(x) \overset{\text{déf.}}{=} u(x)^{v(x)}$, i.e. $\varphi(x) = e^{v(x)\ln u(x)}$
   Il n'est pas difficile d'établir, en invoquant deux compositions et un produit, que $\varphi$ est dérivable sur $I$. Calculer $\varphi'(x)$ en utilisant l'expression de $\varphi(x)$ sous forme exponentielle.
2. Dériver formellement les expressions ci-dessous, en commençant par les réécrire sous forme exponentielle *(réflexe à acquérir en vue de cette année)* :

   (a) $\varphi(x) = x^x$ (b) $\varphi(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ (c) $\varphi(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

CHAPITRE 5

# Calculs de Primitives

## 5.1 Formulaire

*Dans les tableaux ci-dessous, $f$ désigne une fonction continue sur un intervalle non réduit à un point, et $F$ une primitive possible de $f$ sur cet intervalle.*

◇ *primitives des fonctions usuelles (à connaître par cœur) :*

| intervalle(s) | $f(x)$ | $F(x)$ | remarques |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ | $\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ | |
| $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ | $\dfrac{1}{x^n}$ $(n \geqslant 2)$ | $\dfrac{-1}{n-1} \cdot \dfrac{1}{x^{n-1}}$ | $\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$ $\quad \dfrac{1}{-n+1} = \dfrac{-1}{n-1}$ $\quad x^{-n+1} = \dfrac{1}{x^{n-1}}$ |
| $]0, +\infty[$ | $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x}$ | |
| $\mathbb{R}$ | $\sin x$ | $-\cos x$ | |
| $\mathbb{R}$ | $\cos x$ | $\sin x$ | |
| $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ | $\dfrac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert$ | attention : $\ln x$ sur $]0, +\infty[$, mais $\ln(-x)$ sur $]-\infty, 0[$ |
| $\mathbb{R}$ | $e^x$ | $e^x$ | |

◇ *dérivées composées : situations-type à savoir identifier et traiter :*

*dans chacun des cas ci-après, la fonction $f$ est supposée définie sur un intervalle $I$ non réduit à un point, et construite d'une façon spécifique à partir d'une fonction $u$, supposée dérivable et de dérivée continue sur $I$.*

| $f(x)$ | $F(x)$ | condition | remarques |
|---|---|---|---|
| $u'(x)\cdot u(x)^n$ $(n\in\mathbb{N})$ | $\dfrac{1}{n+1}u(x)^{n+1}$ | | |
| $\dfrac{u'(x)}{u(x)^n}$ $(n\geqslant 2)$ | $\dfrac{-1}{n-1}\cdot\dfrac{1}{u(x)^{n-1}}$ | $u(x)\neq 0$ sur $I$ | $\dfrac{1}{-n+1}=\dfrac{-1}{n-1}$ et $u(x)^{-n+1}=\dfrac{1}{u(x)^{n-1}}$ |
| $\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ | $2\sqrt{u(x)}$ | $u(x)>0$ sur $I$ | |
| $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ | $\ln\lvert u(x)\rvert$ | $u(x)\neq 0$ sur $I$ | attention : $\begin{cases}\ln u(x) & \text{si } u(x)>0 \text{ sur } I\\ \ln(-u(x)) & \text{si } u(x)<0 \text{ sur } I\end{cases}$ |
| $u'(x)\cdot e^{u(x)}$ | $e^{u(x)}$ | | |

## 5.2 Exercices

**Exercice 1 - savoir reconnaître une situation-type**

Déterminer une primitive de chacune des fonctions ci-dessous sur l'intervalle indiqué, après avoir identifié dans l'expression une situation-type.

1. *produit*
   (a) $f(x)=\cos x - x\cdot\sin x$ (sur $\mathbb{R}$)
   (b) $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ (sur $\mathbb{R}$)
2. *situation* $u'(x)\cdot u(x)^n$, $n\geqslant 1$
   (a) $f(x)=\cos x\cdot(2\sin x+1)^4$ (sur $\mathbb{R}$)
   (b) $f(x)=\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$ (sur $]0,+\infty[$)
   (c) $f(x)=\dfrac{(\ln x)^4}{x}$ (sur $]0,+\infty[$)
   (d) $f(x)=\sin^3 x$ (sur $\mathbb{R}$)
3. *situation* $\dfrac{u'(x)}{u(x)^n}$, $n\geqslant 2$
   (a) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ (sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$)
   (b) $f(x)=\dfrac{2}{(3x-4)^2}$ (sur $\left]\frac{4}{3},+\infty\right[$)
   (c) $f(x)=\dfrac{2x}{(3x^2+1)^4}$ (sur $\mathbb{R}$)
   (d) $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ (sur $]1,+\infty[$)
4. *situation* $\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$
   (a) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (sur $]-1,1[$)
   (b) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{3x^2+6x+5}}$ (sur $\mathbb{R}$)
5. *situation* $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
   (a) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ (sur $\mathbb{R}$)
   (b) $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$ (sur $]1,1[$ puis $]1,+\infty[$)
   (c) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ (sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ puis $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$)
   (d) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ (sur $]1,+\infty[$ puis $]0,1[$)
6. *situation* $u'(x)e^{u(x)}$
   $f(x)=xe^{-x^2}$ (sur $\mathbb{R}$)

**Exercice 2 - pour aller plus loin - savoir reconnaître une dérivée composée généralisée**

*Pour aborder cet exercice, il est nécessaire d'avoir compris et suffisamment manipulé la formule donnant la dérivée d'une fonction composée quelconque.*
Déterminer une primitive de chacune des fonctions ci-dessous sur l'intervalle indiqué, après avoir identifié dans l'expression une dérivée composée :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (sur $]0, +\infty[$)
2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}$ (sur $]0, +\infty[$)
3. $f(x) = x\sin(x^2)$ (sur $\mathbb{R}$)
4. $f(x) = \dfrac{\sin(\ln x)}{x}$ (sur $]0, +\infty[$)

## 5.3 Pour aller plus loin - Intégration par parties

◇ *principe :*

*Soient $u, v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies et dérivables (donc continues) sur un segment $[a, b]$, de dérivées $u'$, $v'$ également continues sur $[a, b]$*

• par produit, la fonction $uv$ est donc dérivable sur $[a, b]$, avec : $(uv)'(t) = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t)$

• en intégrant cette égalité sur $[a, b]$, on obtient (également par linéarité de l'intégrale) :

$$\int_a^b (uv)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u'(t) \cdot v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t) \cdot v'(t)\,\mathrm{d}t$$

i.e. : $$[u(t) \cdot v(t)]_{t=a}^{t=b} = \int_a^b u'(t) \cdot v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t) \cdot v'(t)\,\mathrm{d}t$$

ou encore : $$u(b) \cdot v(b) - u(a) \cdot v(a) = \int_a^b u'(t) \cdot v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t) \cdot v'(t)\,\mathrm{d}t$$

• d'où :

$$\boxed{\int_a^b u(t) \cdot v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t) \cdot v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u'(t) \cdot v(t)\,\mathrm{d}t}$$

*ce résultat est appelé « formule d'intégration par parties »*

◇ *contexte type d'application :*

*souhaitant calculer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, on peut envisager de recourir à une intégration par parties :*

• *d'une part, lorsque l'on ne trouve pas directement de primitive de $f$,*

• *et, d'autre part, lorsqu'on s'aperçoit qu'on peut réécrire $f(t) = g(t) \cdot h(t)$, où, en remplaçant $g(t)$ par sa dérivée $g'(t)$, et $h(t)$ par l'une de ses primitives $H(t)$, on obtient une intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t) \cdot H(t)\,\mathrm{d}t$ calculable*

Les deux exemples ci-dessous constituent également des modèles de rédaction d'une intégration par parties.

*Exemple 1 : on souhaite calculer l'intégrale* $I = \int_0^\pi t \sin t \, \mathrm{d}t$

*posons :* $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \sin t \end{cases}$ *et :* $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\cos t \end{cases}$ ,

$u$ *et* $v$ *étant dérivables, et de dérivées continues, sur* $[0, \pi]$,
*en intégrant par parties, on obtient :* $I = [-t \cos t]_0^\pi + \int_0^\pi \cos t \, \mathrm{d}t \quad [\dots]$ , *d'où* $I = \pi$

*Exemple 2 : on souhaite déterminer une primitive de* $\ln$ *sur* $]0, +\infty[$ *:*

- *on sait qu'une primitive théorique convenable est la fonction* $F : x \longmapsto \int_1^x \ln t \, \mathrm{d}t$
- *fixons* $x \in \mathbb{R}_+^*$, *et calculons* $F(x)$ *en intégrant par parties :*

*posons :* $\begin{cases} u(t) = \ln t \\ v'(t) = 1 \end{cases}$ *et :* $\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = t \end{cases}$ ,

$u$ *et* $v$ *étant dérivables, et de dérivées continues, sur* $]0, +\infty[$,
*en intégrant par parties, on obtient :* $F(x) = [t \ln t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \cdot t \, \mathrm{d}t \quad [\dots] \quad = x \ln x - x + 1$

*d'où, en supprimant les constantes inutiles, une primitive de ln sur* $]0, +\infty[$ *est la fonction* $x \longmapsto x \ln x - x$

## Exercice 1 - calculs de base

1. En procédant à une intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \int_1^2 te^{-t} \, \mathrm{d}t$
2. On note, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} \mathrm{d}t$.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $F(x)$ en procédant à une intégration par parties.
   (b) En déduire une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \frac{\ln x}{x^2}$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F_n(x) = \int_1^x t^n \ln t \mathrm{d}t$.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $F_n(x)$ en procédant à une intégration par parties.
   (b) En déduire une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto x^n \ln x$

## Exercice 2 - exemples où deux intégrations par parties successives sont nécessaires

1. Calculer les intégrales ci-dessous en procédant à deux intégrations par parties successives :
   (a) $I = \int_0^1 t^2 e^{-t} \, \mathrm{d}t$
   (b) $I = \int_0^\pi e^t \cos(2t) \mathrm{d}t$
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. On note, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x e^{at} \cos(bt) \, \mathrm{d}t$.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $F(x)$ en procédant à deux intégrations par parties successives.
   (b) En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto e^{ax} \cos(bx)$

## Exercice 3 - application à la détermination d'une relation de récurrence

1. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_1^e t(\ln t)^n \, \mathrm{d}t$
   (a) Calculer $I_0$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En procédant à une intégration par parties, exprimer $I_n$ en fonction de $I_{n-1}$.
   (c) En déduire la valeur de $I_1$, $I_2$ et $I_3$.
2. *Intégrales de Wallis.*
   On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \, \mathrm{d}t$.
   (a) Calculer $I_0$ et $I_1$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Exprimer $I_n$ en fonction de $I_{n-2}$.
   *on pourra utiliser* $(\sin t)^n = \sin t \cdot (\sin t)^{n-1}$
   (c) En déduire la valeur de $I_2$, $I_3$, $I_4$ et $I_5$.
   (d) Proposer une expression, faisant intervernir des produits, pour $I_{2n}$ et $I_{2n+1}$.

## Exercice 4

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = \displaystyle\int_1^x \sin(\ln t) \, dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_1^x \cos(\ln t) \, dt$

1. En procédant à des intégrations par parties, déterminer un système vérifié par $F(x)$ et $G(x)$.
2. En déduire la valeur de $F(x)$ et $G(x)$.
3. En déduire une primitive sur $]0, +\infty[$ de chacune des fonctions $x \longmapsto \sin(\ln x)$ et $x \longmapsto \cos(\ln x)$.

## Exercice 5

On note : $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} \, \mathrm{d}x \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \cdot \ln(1 + \cos x) \, \mathrm{d}x$

1. Calculer $J$.
2. En procédant par intégration par parties, exprimer $K$ en fonction de $J$.
3. En déduire la valeur de $K$.

CHAPITRE 6

# Nombres Complexes & Applications

## 6.1 Ecritures algébrique & trigonométrique - rappels & compléments

◇ *les points ci-dessous sont supposés maîtrisés ; dans le cas contraire, il est nécessaire de combler ses lacunes*

- écriture algébrique d'un nombre complexe
- conjugué d'un nombre complexe & règles de calcul correspondantes
- module d'un nombre complexe & règles de calcul correspondantes
- argument(s) d'un nombre complexe non nul & règles de calcul correspondantes
- écriture trigonométrique d'un nombre complexe
- notation exponentielle $e^{i\theta}$ & règles de calcul correspondantes

◇ *rappel : mise sous forme algébrique d'un quotient de deux nombres complexes & « multiplication par le conjugué du dénominateur » :*

◇ *principe :*

☠ un quotient de deux nombres complexes dont le dénominateur n'est pas réel, comme $\dfrac{3-4i}{5+6i}$, doit être systématiquement réécrit afin que les termes non réels figurant au dénominateur disparaissent.

⇨ la « technique de la multiplication par le conjugué » consiste à multiplier le numérateur et le dénominateur du quotient par le conjugué du dénominateur, celui-ci étant alors transformé en une expression de la forme $(a+ib)(a-ib)$, ie $a^2+b^2$, donc réelle.

◇ *pour aller plus loin :*

→ une technique parallèle permettant de réécrire les quotients de quantités réelles dont le dénominateur comporte des radicaux, a été présentée & illustrée dans le chapitre 1

→ une technique parallèle pour lever certaines formes indéterminées dans les calculs de limites a été présentée & illustrée dans le chapitre 3

· exemple 1 : déterminer la limite, lorsque $x \to +\infty$ de $\sqrt{x^2+1}-x$

· exemple 2 : déterminer la limite, lorsque $x \to +\infty$ de $\sqrt{x^4+3x^2}-x^2$

**Exercice 1**

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $\dfrac{3-4i}{5+6i}$

2. $\dfrac{2+3i}{8-5i}$

⋄ *détermination d'un argument d'un nombre complexe non nul écrit sous forme algébrique & « technique de mise en facteur du module » :*

⋄ *principe :*

pour déterminer un argument d'un nombre complexe non nul $z = a + ib$ écrit sous forme algébrique :

➩ la « technique de mise en facteur du module » consiste à réécrire *en pratique* (le calcul exposé ci-dessous est purement théorique) $z$ de la façon suivante (N.B. $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$) :

$$z = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

➩ il ne reste ensuite plus qu'à identifier un réel $\theta$ tel que, simultanément : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

**Exercice 2**

Mettre sous forme module-argument les nombres complexes ci-dessous :

1. $\sqrt{3} + i$
2. $1 - i\sqrt{3}$
3. $1 - i$

**Exercice 3**

Mettre sous forme module-argument les nombres complexes ci-dessous :

1. $(-1+i)^5$
2. $\dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$
3. $\dfrac{2i - 2\sqrt{3}}{4i+4}$

## 6.2 Pour aller plus loin - la technique de « symétrisation » & applications

⋄ *principe :*

étant donné un réel $\theta$, rappelons : $\begin{cases} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{cases}$

la somme et la différence membre à membre de ces deux égalités conduisent alors aux relations ci-dessous :

$\begin{cases} e^{i\theta} + e^{-i\theta} \underset{\rightarrow}{=} 2\cos\theta \\ e^{i\theta} - e^{-i\theta} \underset{\rightarrow}{=} 2i\sin\theta \end{cases}$ *(les flèches ci-contre indiquent le sens dans lequel il faut lire ces relations, dans le contexte de la technique de l'arc moitié)*

*Exemple fondamental d'application : étant donné un réel $\theta$ tel que $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$, on souhaite déterminer le module et un argument des nombres complexes $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$*

*· notons au préalable que les deux nombres ne nous sont donnés ni sous forme algébrique, ni sous forme trigonométrique*

• *une « factorisation forcée du premier par $e^{i\frac{\theta}{2}}$ » fournit :* $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot \underbrace{\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$

*d'où :*

*1^er cas : si* $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ *:*

*alors,* $1 + e^{i\theta}$ *est de module* $2\cos\frac{\theta}{2}$ *et possède* $\frac{\theta}{2}$ *pour argument*

*2^e cas : si* $\cos\frac{\theta}{2} < 0$ *:*

*alors,* $1 + e^{i\theta}$ *est de module* $-2\cos\frac{\theta}{2}$ *et possède* $\frac{\theta}{2} + \pi$ *pour argument*

• *de même, on obtient :* $1-e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}\cdot\underbrace{\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}=-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}=2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}$

*d'où :*

<u>*1^er cas : si*</u> $\sin\frac{\theta}{2}>0$ *:*

*alors,* $1+e^{i\theta}$ *est de module* $2\sin\frac{\theta}{2}$ *et possède* $\frac{\theta-\pi}{2}$ *pour argument*

<u>*2^e cas : si*</u> $\sin\frac{\theta}{2}<0$ *:*

*alors,* $1+e^{i\theta}$ *est de module* $-2\sin\frac{\theta}{2}$ *et possède* $\frac{\theta-\pi}{2}+\pi$, *i.e.* $\frac{\theta+\pi}{2}$, *pour argument*

*N.B. l'hypothèse* $\theta\not\equiv 0\ [\pi]$ *impliquant* $\frac{\theta}{2}\not\equiv 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\frac{\pi}{2}$ *et* $\sin\frac{\theta}{2}$ *sont ici non nuls*

**Exercice 1**

Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ des réels tels que $e^{i\alpha}+e^{i\beta}\neq 0$.

1. Réécrire $e^{i\alpha}+e^{i\beta}$ d'une façon similaire à celles rencontrées dans l'exemple précédent en effectuant une « factorisation forcée » par $e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$
   *(remarque :* $\frac{\alpha+\beta}{2}$ *est situé au milieu de* $\alpha$ *et* $\beta$ *; c'est pourquoi la technique de l'arc moitié est parfois appelée « symétrisation »)*
2. En déduire le module et un argument de $e^{i\alpha}+e^{i\beta}$ en procédant à une discussion de cas.

**Exercice 2 - liens avec certaines formules de trigonométrie**

Soient $p,q\in\mathbb{R}$. On suppose de plus $e^{ip}+e^{iq}\neq 0$.

Déduire du résultat établi dans la question 1. de l'exercice précédent une preuve efficace des formules de trigonométrie intitulées « transformations de sommes en produits » du formulaire de ce Polycopié.

**Exercice 3 - calcul de sommes trigonométriques**

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$.

On souhaite calculer les deux sommes trigonométriques : $\begin{cases} S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\cos k\theta=1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta \\ T_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\sin k\theta=0+\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta \end{cases}$

1. Vérifier que $S_n+iT_n$ est une somme géométrique.
2. *Dans cette question, on suppose* $\theta\equiv 0\,[2\pi]$.
   Calculer $S_n+iT_n$ et en déduire la valeur de $S_n$ et $T_n$.
3. *Dans cette question, on suppose* $\theta\not\equiv 0\,[2\pi]$.
   (a) Justifier que : $S_n+iT_n=\dfrac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$
   (b) Transformer le numérateur et le dénominateur en utilisant la technique de l'arc moitié.
   (c) En déduire l'écriture algébrique de $S_n+iT_n$, puis la valeur des sommes $S_n$ et $T_n$.

## 6.3 Application des complexes à la résolution d'équations du second degré

**Exercice 1**

1. Résoudre l'équation $(E) : z^2 + 6z + 10 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
2. Résoudre l'équation $(E) : z^2 + z + 1 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   *On donnera les solutions : d'une part, sous forme algébrique ; d'autre part, sous forme trigonométrique.*
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0\,[\pi]$.
   Résoudre l'équation $(E) : z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   *On donnera les solutions : d'une part, sous forme algébrique ; d'autre part, sous forme trigonométrique.*

**Exercice 2**

On note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et $z = \omega + \dfrac{1}{\omega}$.

1. (a) Calculer $\omega^5$.
   (b) En déduire : $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$
2. (a) Exprimer $z^2$ en fonction de $\omega$.
   (b) En déduire que $z$ est solution d'une équation du second degré à coefficients réels, que l'on précisera.
3. (a) Mettre en évidence un lien entre $z$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
   (b) Déduire des questions précédentes la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

**Exercice 3**

On note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, ainsi que $u = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $v = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

1. (a) Calculer $\omega^7$.
   (b) En déduire la valeur de $u + v$
2. (a) Exprimer $u^2$ en fonction de $u$ et $v$.
   (b) Déduire des questions précédentes que $u$ est solution d'une équation du second degré à coefficients réels, que l'on précisera.
3. (a) Mettre en évidence un lien entre $u$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$.
   (b) Montrer que $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) > 0$
   (c) Déduire des questions précédentes la valeur de $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$.

# Deuxième partie

## Indications & réponses aux exercices

CHAPITRE 7

# Manipulations calculatoires

## 7.1 Radicaux

**Exercice 1**

$A = -71\sqrt{3} + 41\sqrt{6}$

**Exercice 2**

$A = 57 - 12\sqrt{15}$ $\quad B = 23$ $\quad C = -218$ $\quad D = -72$ $\quad E = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

**Exercice 3**

$A = \dfrac{5 + 2\sqrt{2}}{17}$ $\quad B = \dfrac{30 - 3\sqrt{5}}{19}$ $\quad C = \dfrac{9 + 2\sqrt{6}}{57}$

**Exercice 4**

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$$

**Exercice 5**

$A^2 = 4$ et $A > 0$, d'où $A = 2$ $\quad B^2 = 16$ et $B < 0$, d'où $B = -4$

**Exercice 6**

1) $\left(\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2 = 2(a + b)$

donc la quantité $\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$, positive, est égale à $\sqrt{2(a + b)}$

2) la première égalité s'obtient en prenant $a = 4$ et $b = 3$, la seconde en prenant $a = 5$ et $b = 2$

## 7.2 Puissances

**Exercice 1**

$A = a^{40}b^{60}$ $\quad B = -\dfrac{8b^{10}}{a^9}$ $\quad C = \dfrac{a^5}{64b^5}$ $\quad D = \dfrac{1}{a^{10}b^6}$

**Exercice 2**

$A = -\dfrac{1}{8}$ $\quad B = \dfrac{1}{4}$

**Exercice 3**

$A = \dfrac{1}{6}$ $\quad B = \dfrac{1}{5} \times 10^4 = 2 \times 10^3$ $\quad C = \dfrac{1}{11}$ $\quad D = 3$

CHAPITRE 8

# Trigonométrie

## Exercice 1

2. en utilisant $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}$, on obtient : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
3. en utilisant $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$, on obtient : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

## Exercice 2

1. (b) en utilisant les formules d'addition, on obtient : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$
2. en utilisant plutôt la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, on obtient : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$
3. dans chaque cas, les carrés de ces quantités, positives, sont bien égaux.

## Exercice 3

1. (b) utiliser $\cos(3\theta) = \cos(2\theta+\theta)$ et la formule d'addition correspondante ; on obtient : $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$

1. (d) procéder de même ; on obtient : $\sin(3\theta) = \sin(\theta)\cdot\left(4\cos^2(\theta)-1\right)$

2. utiliser $\cos(5\theta) = \cos(3\theta+2\theta)$, la formule d'addition correspondante, et les résultats précédents

3. (d) comparer les carrés de ces deux quantités positives

4. on obtient successivement : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}$, $\quad \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\quad \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

## Exercice 4

1. linéariser $\cos^2 x$, puis, dans l'expression obtenue, $\cos^2(2x)$

2. (a) une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \cos^4(x)$ est donc la fonction $x \longmapsto \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x)$

2.(b) ainsi : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^4(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x)\right]_0^{2\pi} = [\ldots] = \frac{3\pi}{4}$

## Exercice 5

1. (a) $\cos(5x)+\sin(5x) = \sqrt{2}\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$

   (b) donc :
$$\begin{aligned} \cos(5x)+\sin(5x)=0 &\iff \text{il existe } k\in\mathbb{Z} \text{ tel que } 5x-\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{2}+k\pi \\ '' &\iff \text{il existe } k\in\mathbb{Z} \text{ tel que } x = \tfrac{3\pi}{20}+k\tfrac{\pi}{5} \end{aligned}$$

   d'où : $\mathscr{S} = \left\{ \frac{3\pi}{20} + k\frac{\pi}{5} \ , \ k\in\mathbb{Z} \right\}$

2. par exemple : $\sqrt{3}\sin(2x)-\cos(2x) = 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

   donc :
$$\begin{aligned} \sqrt{3}\sin(2x)-\cos(2x)=0 &\iff \text{il existe } k\in\mathbb{Z} \text{ tel que } 2x-\tfrac{\pi}{6} = k\pi \\ '' &\iff \text{il existe } k\in\mathbb{Z} \text{ tel que } x = \tfrac{\pi}{12}+k\tfrac{\pi}{2} \end{aligned}$$

   d'où : $\mathscr{S}_2 = \left\{ \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \ , \ k\in\mathbb{Z} \right\}$

**Exercice 6**

1. *première équation :*

$$\sin\left(3x+\tfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\tfrac{2\pi}{3}-x\right) \iff \text{il existe } k\in\mathbb{Z} \text{ tq } \left(3x+\tfrac{\pi}{3}=\tfrac{2\pi}{3}-x+2k\pi\right) \text{ ou } \left(3x+\tfrac{\pi}{3}=\pi-\left(\tfrac{2\pi}{3}-x\right)+2k\pi\right)$$

$$'' \iff \text{il existe } k\in\mathbb{Z} \text{ tq } \left(4x=\tfrac{\pi}{3}+2k\pi\right) \text{ ou } (2x=2k\pi)$$

$$'' \iff \text{il existe } k\in\mathbb{Z} \text{ tq } \left(x=\tfrac{\pi}{12}+k\tfrac{\pi}{2}\right) \text{ ou } (x=k\pi)$$

d'où : $\mathscr{S}_1=\left\{\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$

2. *deuxième équation :*

$$\cos\left(2x-\tfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\tfrac{\pi}{6}\right) \iff \text{il existe } k\in\mathbb{Z} \text{ tq } \left(2x-\tfrac{\pi}{4}=x+\tfrac{\pi}{6}+2k\pi\right) \text{ ou } \left(2x-\tfrac{\pi}{4}=-\left(x+\tfrac{\pi}{6}\right)+2k\pi\right)$$

[⋮]

d'où : $\mathscr{S}_2=\left\{\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{36}+k\frac{2\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

3. *troisième équation :*

$$\sin(3x)=\cos\left(x-\tfrac{\pi}{6}\right) \iff \cos\left(3x-\tfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x-\tfrac{\pi}{6}\right)$$

[⋮]

d'où : $\mathscr{S}_3=\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ (notons que le premier ensemble est inclus dans le second)

soit : $\mathscr{S}_3=\left\{\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

CHAPITRE 9

# Calculs de Limites

## 9.1 Généralités - rappels & compléments

**Exercice 1**

N.B. les six limites comportent des formes indéterminées de type « $\frac{0}{0}$ »

1. la quantité se réécrit : $\dfrac{\sin(ax)}{x} = \dfrac{\sin(ax)}{ax} \cdot a$,

   or : $\lim\limits_{x\to 0} ax = 0$, d'où, par composition (à rédiger, cf exemples détaillés) et produit : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{x} = a$

2. même démarche : $\dfrac{\ln(1+ax)}{x} = \dfrac{\ln(1+ax)}{ax} \cdot a$, et on obtient : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+ax)}{x} = a$

3. même démarche : $\dfrac{e^{ax}-1}{x} = \dfrac{e^{ax}-1}{ax} \cdot a$, et on obtient : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-1}{x} = a$

4. le résultat établi en 3. incite à écrire : $\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \dfrac{e^{ax}-1}{x} + \dfrac{1-e^{bx}}{x}$

   on établit ensuite, comme en 3., puis par somme : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = a-b$

5. la quantité se réécrit : $\dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \dfrac{\sin(ax)}{ax} \cdot \dfrac{a\,\cancel{x}}{b\,\cancel{x}} \cdot \dfrac{bx}{\sin(bx)}$,

   or : $\lim\limits_{x\to 0} ax = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} bx = 0$, d'où, par compositions, inverse, puis produits : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \dfrac{a}{b}$

6. même démarche : $\dfrac{\ln(1+ax)}{\sin(bx)} = \dfrac{\ln(1+ax)}{ax} \cdot \dfrac{a\,\cancel{x}}{b\,\cancel{x}} \cdot \dfrac{bx}{\sin(bx)}$, et on obtient : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+ax)}{\sin(bx)} = \dfrac{a}{b}$

**Exercice 2**

1. la quantité se réécrit : $\dfrac{x}{e^{\sin x}-1} = \dfrac{\sin x}{e^{\sin x}-1} \cdot \dfrac{x}{\sin x}$

   or : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0 \\ \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{e^y-1}{y} = 1 \end{cases}$, donc, par composition : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x} = 1$

   et : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, d'où, par inverses, puis produit : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^{\sin x}-1} = 1$

2. la quantité se réécrit : $\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$

   or : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2} = 0 \\ \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin y}{y} = 1 \end{cases}$, donc, par composition : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = 1$, d'où : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

3. la quantité se réécrit : $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \dfrac{\ln\left((\sqrt{x})^2\right)}{\sqrt{x}} = 2\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

   or : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \lim\limits_{y\to +\infty} \dfrac{\ln y}{y} = 0 \end{cases}$, donc, par composition : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$

4. la quantité se réécrit : $x^2 e^{-\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^4 e^{-\sqrt{x}}$

or : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \lim\limits_{y \to +\infty} y^4 e^{-y} = 0 \end{cases}$, donc, par composition : $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x})^4 e^{-\sqrt{x}} = 0$, d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}} = 0$

5. la quantité se réécrit : $x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

or : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1 \end{cases}$, donc, par composition : $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1$

6. la quantité se réécrit : $x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

or : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\sin y}{y} = 1 \end{cases}$, donc, par composition : $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$

## 9.2 La technique de « mise en facteur du terme prépondérant »

**Exercice**

1. $3x^2 - 4\ln x + e^{5x} = e^{5x} \cdot \left(3x^2 e^{-5x} - 4\ln x \cdot e^{-5x} + 1\right)$,

or : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-5x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x \cdot e^{-5x} = 0 \end{cases}$, (par exemple : $x^2 e^{-5x} = \dfrac{1}{25} \cdot (5x)^2 e^{-5x}$ et $\ln x \cdot e^{-5x} = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{\ln x}{x} \cdot (5x) e^{-5x}$)

d'où, par somme, puis produit (il n'y a plus de forme indéterminée) : $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 - 4\ln x + e^{5x} = +\infty$

2. $3e^{2x} - 2e^{3x} = e^{3x} \cdot \left(3e^{-x} - 2\right)$,

or : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, d'où, par somme, puis produit (plus de forme indéterminée) : $\lim\limits_{x \to +\infty} 3e^{2x} - 2e^{3x} = -\infty$

3. $\dfrac{x^4 - 5\ln x + 2e^x}{x^4 - 2e^x + 3\sqrt{x}} = \dfrac{\cancel{e^x} \cdot \left(x^4 e^{-x} - 5\ln x \cdot e^{-x} + 2\right)}{\cancel{e^x} \cdot \left(x^4 e^{-x} - 2 + 3\sqrt{x} \cdot e^{-x}\right)}$, et, comme en 1. : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 e^{-x} - 5\ln x \cdot e^{-x} + 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 e^{-x} - 2 + 3\sqrt{x} \cdot e^{-x} = -2 \end{cases}$,

d'où, par simplification, puis quotient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - 5\ln x + 2e^x}{x^4 - 2e^x + 3\sqrt{x}} = -1$

4. • lorsque $x \to +\infty$, le terme prépondérant est $e^x$, d'où :

$\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{\cancel{e^x} \cdot (1 - e^{-2x})}{\cancel{e^x} \cdot (1 + e^{-2x})} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$,

or : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$, d'où, par quotient (il n'y a plus de forme indéterminée) : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$

• lorsque $x \to -\infty$, le terme prépondérant est $e^{-x}$, d'où :

$\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{\cancel{e^{-x}} \cdot (e^{2x} - 1)}{\cancel{e^{-x}} \cdot (e^{2x} + 1)} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$,

or : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$, d'où, par quotient (il n'y a plus de forme indéterminée) : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -1$

5. les trois quantités en jeu étant de l'ordre de grandeur de $x$, factorisons le numérateur et le dénominateur par $x$, en faisant toutefois attention à la gestion des racines carrées :

• lorsque $x \to +\infty$, $x = \sqrt{x^2}$, donc : $\dfrac{\sqrt{x^2 - 1} + 3x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{\cancel{x} \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 3\right)}{\cancel{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \dfrac{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 3}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$,

d'où, par somme puis quotient (il n'y a plus de forme indéterminée) : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 1} + 3x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 4$

- lorsque $x \to -\infty$, $x = -\sqrt{x^2}$, donc : $\dfrac{\sqrt{x^2-1}+3x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\cancel{x}\cdot\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+3\right)}{-\cancel{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \dfrac{-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+3}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$,

  d'où, par somme puis quotient (il n'y a plus de forme indéterminée) : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}+3x}{\sqrt{x^2+1}} = -2$

6. il faut ici être un peu astucieux : $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} = \dfrac{\ln\left(x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\ln x} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$,

   d'où, par quotient puis somme (il n'y a plus de forme indéterminée) : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1$

## 9.3 La technique de « l'expression conjuguée »

**Exercice 1**

1. utilisons la technique de l'expression conjuguée : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \dfrac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

   d'où, par inverse (il n'y a plus de forme indéterminée) : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = 0$

2. de même : $x - \sqrt{x^2+x} = \dfrac{x^2-(x^2+x)}{x+\sqrt{x^2+x}} = \dfrac{-x}{x+\sqrt{x^2+x}}$

   d'où, en divisant numérateur et dénominateur par $x$ (N.B. au voisinage de $+\infty$, $\sqrt{x^2} = x$) :

   $x - \sqrt{x^2+x} = \dfrac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$,

   ainsi, par somme et inverse (il n'y a plus de forme indéterminée) : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2+x}\right) = -\dfrac{1}{2}$

3. de même : $\sqrt{x^2+4x+3}-x = \dfrac{(x^2+4x+3)-x^2}{\sqrt{x^2+4x+3}+x} = \dfrac{4x+3}{\sqrt{x^2+4x+3}+x}$

   d'où, en divisant numérateur et dénominateur par $x$ :

   $\sqrt{x^2+4x+3}-x = \dfrac{4+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}$

   ainsi, par somme et inverse (il n'y a plus de forme indéterminée) : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+3}-x\right) = 2$

4. de même : $\sqrt{x^2+4x+3}+x = \dfrac{(x^2+4x+3)-x^2}{\sqrt{x^2+4x+3}-x} = \dfrac{4x+3}{\sqrt{x^2+4x+3}-x}$

   d'où, en divisant numérateur et dénominateur par $x$ : (N.B. au voisinage de $+\infty$, $\sqrt{x^2} = -x$) :

   $\sqrt{x^2+4x+3}+x = \dfrac{4+\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}-1}$

   ainsi, par somme et inverse (il n'y a plus de forme indéterminée) : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+3}-x\right) = -2$

**Exercice 2**

1. $\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \dfrac{(x+1)-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}$

   d'où, par inverse (il n'y a plus de forme indéterminée) : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$

2. $\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ n'est autre que le taux d'accroissement en $0$ de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x+1}$, qui est bien définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$, de fonction dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$, avec donc $f(0) = 1$ et $f'(0) = \frac{1}{2}$.

   la définition de la dérivabilité en $0$ fournit alors : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$, d'où le résultat établi en 1.

## 9.4 Expressions $u(x)^{v(x)}$ & technique de « mise sous forme exponentielle »

**Exercice 1**

1. $\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}$, or : $x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{a}{x}}\cdot a$ et : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a}{x} = 0 \\ \lim\limits_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1 \end{cases}$,

   donc par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{a}{x}} = 1$, d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$

2. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$, or : $x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\cdot x$, et, comme en 1. : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$,

   d'où, par produit puis composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} = +\infty$

3. $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{x^2\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$, or : $x^2\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x}}\cdot(-x)$, et, de même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x}} = 1$,

   d'où, par produit puis composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{x^2} = 0$

**Exercice 2**

1. $(\sin x)^x = e^{x\ln(\sin x)}$, or : $x\ln(\sin x) = \frac{x}{\sin x}\cdot\sin x\ln(\sin x)$ et : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \sin x = 0^+ \\ \lim\limits_{y\to 0^+} y\ln y = 0 \end{cases}$,

   donc, par composition : $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x\ln(\sin x) = 0$, d'où : $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^x = e^0 = 1$

2. $x^{\frac{a}{\ln x}} = e^{\frac{a}{\ln x}\cdot\ln x} = e^a$, d'où : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{a}{\ln x}} = e^a$

3. $x^{\frac{1}{\sqrt{|\ln x|}}} = e^{\frac{1}{\sqrt{|\ln x|}}\cdot\ln x}$,

   or, au voisinage de $0^+$, $\ln x$ est négatif, d'où : $x^{\frac{1}{\sqrt{|\ln x|}}} = e^{-\sqrt{|\ln x|}}$,

   d'où, par composition (il n'y a plus de forme indéterminée) : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\sqrt{|\ln x|}}} = 0$

4. $x^{-\frac{1}{\sqrt{|\ln x|}}} = e^{-\frac{1}{\sqrt{|\ln x|}}\cdot\ln x}$,

   d'où, ici : $x^{\frac{1}{\sqrt{|\ln x|}}} = e^{+\sqrt{|\ln x|}}$,

   puis, par composition (il n'y a plus de forme indéterminée) : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-\frac{1}{\sqrt{|\ln x|}}} = +\infty$

**Exercice 3**

1. $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$

   or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc, par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

2. $x^{\frac{a}{\ln x}} = e^{\frac{a}{\ln x}\cdot\ln x} = e^a$, d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{a}{\ln x}} = e^a$

3. $x^{\frac{1}{\sqrt{\ln x}}} = e^{\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\cdot\ln x}$,

   or, au voisinage de $+\infty$, $\ln x$ est positif, d'où : $x^{\frac{1}{\sqrt{|\ln x|}}} = e^{\sqrt{\ln x}}$,

   d'où, par composition (il n'y a plus de forme indéterminée) : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\sqrt{\ln x}}} = +\infty$

4. $x^{-\frac{1}{\sqrt{\ln x}}} = e^{-\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\cdot\ln x}$,

   d'où, ici : $x^{-\frac{1}{\sqrt{\ln x}}} = e^{-\sqrt{\ln x}}$,

   puis, par composition (il n'y a plus de forme indéterminée) : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-\frac{1}{\sqrt{\ln x}}} = 0$

CHAPITRE 10

# Calculs de Dérivées

## Exercice 1

1. $f'(x) = \ln x$.
   *remarque : une primitive sur $]0, +\infty[$ de $\ln$ est donc $x \longmapsto x\ln x - x$ (primitive usuelle cette année)*
2. $\dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$, donc $f'(x) = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$
3. $f'(x) = \dfrac{ad - bc}{(cx+d)^2}$
   *remarque : l'allure-type de la dérivée d'une fonction homographique, i.e. $\frac{''constante''}{(cx+d)^2}$, est à connaître (contrôle des calculs)*
4. de manière littérale : $f'(x) = \dfrac{(4x-5)\cdot(x-3)^2 - (2x^2-5x+3)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}$
   après simplification par $(x-3)$ & calculs, on obtient : $f'(x) = \dfrac{-7x+9}{(x-3)^3}$
5. $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$
6. de manière littérale : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$
   *remarque : la présence de radicaux au dénominateur ne bloquant pas l'étude du signe de $f'(x)$, il n'est pas nécessaire de chercher à la supprimer, dans ce contexte.*
7. $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
8. $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
9. $f'(x) = \dfrac{-(\cos x - \sin x)^2 - (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} = [\ldots] = \dfrac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$

## Exercice 2

1. $f(x) = u(x)^5$ avec $u(x) = \sin x$, donc $f'(x) = 5\sin^4 x \cdot \cos x$
2. $f'(x) = -4\cos^3 x \cdot \sin x$ (de même)
3. de manière littérale, $f'(x) = \dfrac{2\sin x\cos x\cdot(1+\cos^2 x) - \sin^2 x\cdot(-2\cos x\sin x)}{(1+\cos^2 x)^2}$,
   en développant : $f'(x) = \dfrac{2\sin x\cos x + 2\sin x\cos x\cdot(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(1+\cos^2 x)^2}$,
   d'où : $f'(x) = \dfrac{4\sin x\cos x}{(1+\cos^2 x)^2}$
4. $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = x^4 - 2x + 3$, donc $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^4-2x+3}}\cdot(4x^3-2) = \dfrac{2x^3-1}{\sqrt{x^4-2x+3}}$
5. même situation qu'en 4. avec $u(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ et, après calculs, $u'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2}$
   ainsi : $f'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\cdot\dfrac{2}{(1-x)^2}$
   d'où, après simplifications : $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot(1-x)}$

6. $f'(x) = (2x-3)e^{x^2-3x+4}$
7. $f'(x) = \left[\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}} \cdot (2x-1)\right] \cdot e^{\sqrt{x^2-x+1}} = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} e^{\sqrt{x^2-x+1}}$
8. $f(x) = \ln u(x)$ avec $u(x) = \sin x$, donc $f'(x) = \dfrac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
9. même situation qu'en 8. ; on obtient de même $f'(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$
10. même situation qu'en 8. ; on obtient de même $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$
11. même situation qu'en 8. avec $u(x) = \ln x$ ; on obtient de même $f'(x) = \dfrac{1}{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x \ln x}$
12. même situation qu'en 8. avec $u(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.
   - à part : $u'(x) = 1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

   la suite du calcul sera revue en CPGE : une mise au même dénominateur fournit : $u'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$,
   - d'où : $f'(x) = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$, puis, grâce à une simplication : $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

   *remarque : une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ est donc $x \longmapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ (primitive usuelle cette année)*

## Exercice 3

1. $f(x) = \sin u(x)$ avec $u(x) = x^2$, donc $f'(x) = 2x \cdot \cos(x^2)$
2. situation analogue à 1., donc $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x})$
3. situation analogue à 1., donc $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \cdot \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
4. considérant $f(x)$ comme un quotient dont le numérateur est une fonction composée,

   on obtient : $f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x}\sin(\ln x) \cdot x - \cos(\ln x) \cdot 1}{x^2}$, d'où : $f'(x) = -\dfrac{\sin(\ln x) + \cos(\ln x)}{x^2}$

## Exercice 4

1. les opérations algébriques utilisées pour obtenir l'expression $\varphi(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$ sont, dans cet ordre : une composition par ln, un produit, puis une composition par exp.

   ainsi : $\varphi'(x) = \left[v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \dfrac{u'(x)}{u(x)}\right] \cdot e^{v(x)\ln u(x)}$,

   soit : $\varphi'(x) = \left[v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \dfrac{u'(x)}{u(x)}\right] \cdot u(x)^{v(x)}$
2. (a) $\varphi(x) = e^{x \ln x}$, donc $\varphi'(x) = (\ln x + 1) \cdot x^x$

   (b) $\varphi(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$,

   donc $\varphi'(x) = \left[-\dfrac{1}{x^2} \cdot \ln(1+x) + \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{1+x}\right] \cdot (1+x)^{\frac{1}{x}}$,

   d'où : $\varphi'(x) = \dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} \cdot (1+x)^{\frac{1}{x}}$

   (c) $\varphi(x) = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$,

   donc $\varphi'(x) = \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}\right)\right] \cdot e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$,

   d'où : $\varphi'(x) = \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right] \cdot \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

CHAPITRE 11

# Calcul de Primitives

## 11.1 Corrigé des exercices sur les primitives usuelles

**Exercice 1**

1. (a) une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \longmapsto x \cdot \cos x$

   (b) $f(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ où $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x^2+1}$,
   donc une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \longmapsto x \cdot \sqrt{x^2+1}$

2. (a) $f(x) = \dfrac{1}{2}u'(x) \cdot u(x)^4$, où $u(x) = 2\sin x + 1$,
   donc une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \longmapsto \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{5}u(x)^5$, i.e. $F : x \longmapsto \dfrac{1}{10}(2\sin x + 1)^5$

   (b) $f(x) = 2u'(x) \cdot u(x)^2$, où $u(x) = \sqrt{x} + 1$,
   donc une primitive de $f$ sur $]0, +\infty[$ est $F : x \longmapsto \dfrac{2}{3}(\sqrt{x}+1)^3$

   (c) $f(x) = u'(x) \cdot u(x)^4$, où $u(x) = \ln x$,
   donc une primitive de $f$ sur $]0, +\infty[$ est $F : x \longmapsto \dfrac{1}{5}(\ln x)^5$

   (d) $f(x) = \sin x \cdot \sin^2 x = \sin x \cdot (1 - \cos^2 x)$, donc $f(x) = \sin x + u'(x) \cdot u(x)^2$, où $u(x) = \cos x$,
   donc une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \longmapsto -\cos x + \dfrac{1}{3}\cos^3 x$

3. (a) $f(x) = -\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$, où $u(x) = \cos x$,
   donc une primitive de $f$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est $F : x \longmapsto \dfrac{1}{u(x)}$, i.e. $F : x \longmapsto \dfrac{1}{\cos x}$

   (b) $f(x) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$, où $u(x) = 3x - 4$,
   donc une primitive de $f$ sur $\left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$ est $F : x \longmapsto \dfrac{2}{3} \cdot \left(-\dfrac{1}{3x-4}\right)$, i.e. $F : x \longmapsto -\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3x-4}$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{u'(x)}{u(x)^4}$, où $u(x) = 3x^2 + 1$,
   donc une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \longmapsto \dfrac{1}{3} \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(3x^2+1)^3}\right)$, i.e. $F : x \longmapsto -\dfrac{1}{9}\dfrac{1}{(3x^2+1)^3}$

   (d) $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$, où $u(x) = \ln x$,
   donc une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \longmapsto -\dfrac{1}{\ln x}$

4. (a) $f(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x) = 1 - x^2$, donc une primitive sur $]-1, 1[$ de $f$ est $F : x \longmapsto -\sqrt{1-x^2}$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{6}\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x) = 3x^2 + 6x + 5$, donc une primitive de $f$ est $F : x \longmapsto \dfrac{1}{3}\sqrt{3x^2+6x+5}$

5. (a) $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = e^x + 1$,
   donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f$ est $F : x \longmapsto \ln(e^x + 1)$ (N.B. $e^x + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$)

(b) $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u(x) = 1 - x^2$, donc :

- une primitive sur $]-1, 1[$, sur lequel $1 - x^2 > 0$, de $f$, est $F : x \longmapsto -\frac{1}{2}\ln(1 - x^2)$
- une primitive sur $]1, +\infty[$, sur lequel $1 - x^2 < 0$, de $f$, est $F : x \longmapsto -\frac{1}{2}\ln(x^2 - 1)$

(c) $f(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u(x) = \cos x$, donc :

- une primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, sur lequel $\cos x > 0$, de $f$, est $F : x \longmapsto -\ln(\cos x)$
- une primitive de $f$ sur $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, sur lequel $\cos x < 0$, de $f$, est $F : x \longmapsto -\ln(-\cos x)$

(d) $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u(x) = \ln x$, donc :

- une primitive sur $]1, +\infty[$, sur lequel $\ln x > 0$, de $f$, est $F : x \longmapsto \ln(\ln x)$
- une primitive sur $]0, 1[$, sur lequel $\ln x < 0$, de $f$, est $F : x \longmapsto \ln(-\ln x)$

6. $f(x) = -\frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$, où $u(x) = -x^2$, donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f$ est $F : x \longmapsto -\frac{1}{2}e^{-x^2}$

**Exercice 2**

1. $f(x) = -u'(x) \cdot \sin(u(x))$, où $u(x) = \frac{1}{x}$
   or, une primitive de $\sin$ sur $\mathbb{R}$ est $-\cos$,
   donc une primitive de $f$ sur $]0, +\infty[$ est $F : x \longmapsto +\cos(u(x))$, i.e. $F : x \longmapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $f(x) = 2u'(x) \cdot \cos(u(x))$, où $u(x) = \sqrt{x}$
   or, une primitive de $\cos$ sur $\mathbb{R}$ est $\sin$,
   donc une primitive de $f$ sur $]0, +\infty[$ est $F : x \longmapsto 2\sin(u(x))$, i.e. $F : x \longmapsto 2\sin\sqrt{x}$
3. $f(x) = -\frac{1}{2}u'(x) \cdot \sin(u(x))$, où $u(x) = x^2$
   or, une primitive de $\sin$ sur $\mathbb{R}$ est $-\cos$,
   donc une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \longmapsto -\frac{1}{2}\cos(u(x))$, i.e. $F : x \longmapsto -\frac{1}{2}\cos(x^2)$
4. $f(x) = u'(x) \cdot \sin(u(x))$, où $u(x) = \ln x$
   or, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $\sin$ est $-\cos$,
   donc une primitive de $f$ sur $]0, +\infty[$ est $F : x \longmapsto -\cos(u(x))$, i.e. $F : x \longmapsto -\cos(\ln x)$

## 11.2 Corrigé des exercices sur l'intégration par parties

**Exercice 1**

1. poser $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$, on obtient alors : $I = \frac{2}{e} - \frac{3}{e^2} = \frac{2e - 3}{e^2}$
2. poser $\begin{cases} u(t) = \ln t \\ v'(t) = \frac{1}{t^2} \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = -\frac{1}{t} \end{cases}$, on obtient alors : $F(x) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$,
   donc une primitive sur $]0, +\infty[$ de $x \longmapsto \frac{\ln x}{x^2}$ est $x \longmapsto -\frac{(1 + \ln x)}{x}$
3. (a) poser $\begin{cases} u(t) = \ln t \\ v'(t) = t^n \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = \frac{1}{n+1}t^{n+1} \end{cases}$,
   on obtient alors : $F_n(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \cdot \ln x - \frac{1}{(n+1)^2} \cdot x^{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$
   (b) ainsi, une primitive sur $]0, +\infty[$ de $x \longmapsto x^n \cdot \ln x$ est $x \longmapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} \cdot \ln x - \frac{1}{(n+1)^2} \cdot x^{n+1}$

**Exercice 2**

1. (a) • en posant $\begin{cases} u(t) = t^2 \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(t) = 2t \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$,

   on obtient déjà : $I = -\dfrac{1}{e} + 2\displaystyle\int_0^1 te^{-t}\,\mathrm{d}t$

   • on transforme alors la nouvelle intégrale en posant $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$,

   et on obtient finalement : $I = 2 - \dfrac{5}{e} = \dfrac{2e-5}{e}$

   (b) • en posant $\begin{cases} u(t) = \cos(2t) \\ v'(t) = e^{t} \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(t) = -2\sin(2t) \\ v(t) = e^{t} \end{cases}$,

   on obtient déjà : $I = (e^{\pi} - 1) + 2\displaystyle\int_0^{\pi} e^{t}\sin(2t)\,\mathrm{d}t$

   • on transforme alors la nouvelle intégrale en posant $\begin{cases} u(t) = \sin(2t) \\ v'(t) = e^{t} \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(t) = 2\cos(2t) \\ v(t) = e^{t} \end{cases}$,

   et on obtient finalement : $I = (e^{\pi} - 1) - 4I$, d'où : $I = \dfrac{e^{\pi}-1}{5}$

2. (a) • en posant $\begin{cases} u(t) = \cos(bt) \\ v'(t) = e^{at} \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(t) = -b\sin(bt) \\ v(t) = \frac{1}{a}e^{at} \end{cases}$,

   on obtient déjà : $F(x) = \dfrac{1}{a}\left[e^{ax}\cos(bx) - 1\right] + \dfrac{b}{a}\displaystyle\int_0^{x} e^{at}\sin(bt)\,\mathrm{d}t$

   • on transforme alors la nouvelle intégrale en posant $\begin{cases} u(t) = \sin(bt) \\ v'(t) = e^{at} \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(t) = b\cos(bt) \\ v(t) = \frac{1}{a}e^{at} \end{cases}$,

   et on obtient finalement : $F(x) = \dfrac{1}{a}\left[e^{ax}\cos(bx) - 1\right] + \dfrac{b}{a}\left[\dfrac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \dfrac{b}{a}F(x)\right]$,

   d'où, en regroupant les termes en $F(x)$ : $F(x) = \dfrac{1}{a^2+b^2}e^{ax}\left[a\cos(bx) + b\sin(bx)\right] - \dfrac{a}{a^2+b^2}$

   (b) en supprimant dans l'expression précédente les constantes inutiles, on obtient comme primitive la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{a^2+b^2}e^{ax}\left[a\cos(bx) + b\sin(bx)\right]$

**Exercice 3**

1. (a) $I_0 = \dfrac{1}{2}(e^2 - 1)$

   (b) en posant : $\begin{cases} u(t) = (\ln t)^n \\ v'(t) = t \end{cases}$ et : $\begin{cases} u'(t) = n(\ln t)^{n-1}\cdot\frac{1}{t} \\ v(t) = \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$,

   on obtient : $I_n = \left[\dfrac{1}{2}t^2(\ln t)^{n-1}\right]_1^e - \dfrac{n}{2}\cdot\displaystyle\int_1^e t(\ln t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$, d'où : $I_n = \dfrac{1}{2}(e^2 - nI_{n-1})$

   (c) On obtient ensuite successivement : $I_1 = \dfrac{1}{4}(e^2+1)$ $\quad I_2 = \dfrac{1}{4}(e^2-1)$ $\quad I_3 = \dfrac{1}{8}(e^2+3)$

2. (a) $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$

   (b) en posant : $\begin{cases} u(t) = \sin^{n-1} t \\ v'(t) = \sin t \end{cases}$ et : $\begin{cases} u'(t) = (n-1)\sin^{n-2} t\cdot\cos t \\ v(t) = -\cos t \end{cases}$,

   on obtient : $I_n = \underbrace{\left[-\cos t\cdot\sin^{n-1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + (n-1)\cdot\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t\cdot\cos^2 t\,\mathrm{d}t$

   enfin, $\cos^2 = 1 - \sin^2$ fournit : $I_n = (n-1)\cdot(I_{n-2} - I_n)$, d'où : $I_n = \dfrac{n-1}{n}\cdot I_{n-2} \quad (*)$

   (c) $(*)$ avec $n = 2$ fournit alors : $I_2 = \dfrac{1}{2}\cdot I_0$, d'où : $I_2 = \dfrac{\pi}{4}$

   $(*)$ avec $n = 3$ fournit de même : $I_2 = \dfrac{2}{3}\cdot I_1$, d'où : $I_2 = \dfrac{2}{3}$

   $(*)$ avec $n = 4$ fournit enfin : $I_4 = \dfrac{3}{4}\cdot I_2$, d'où : $I_2 = \dfrac{3\pi}{16}$

(d) en utilisant $(*)$ $n$ fois, on obtient :

- pour $I_{2n}$ :

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} \cdot I_{2n-2} \\ &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{2n-4} \\ &\vdots \end{aligned}$$

d'où : $I_{2n} = \dfrac{(2n-1) \times (2n-3) \times \ldots \times 1}{(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$

- pour $I_{2n+1}$ :

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \cdot I_{2n-1} \\ &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot I_{2n-3} \\ &\vdots \end{aligned}$$

d'où : $I_{2n+1} = \dfrac{(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2}{(2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times 5 \times 3} (\times 1)$

## Exercice 4

1. en posant : $\begin{cases} u(t) = \sin(\ln t) \\ v'(t) = 1 \end{cases}$ et : $\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \cdot \cos(\ln t) \\ v(t) = t \end{cases}$,
   on obtient : $F(x) = [t \cdot \sin(\ln t)]_1^x - G(x)$, i.e. : $F(x) = x \cdot \sin(\ln x) - G(x)$
   en procédant de même avec $G(x)$, on obtient : $G(x) = (x \cdot \cos(\ln x) - 1) + F(x)$
   d'où le système : $\begin{cases} F(x) + G(x) &= x \cdot \sin(\ln x) \\ -F(x) + G(x) &= x \cdot \cos(\ln x) - 1 \end{cases}$
2. en effectuant la somme et la différence même à membre des deux égalités, on obtient :
   $G(x) = \dfrac{1}{2} [x \cdot \sin(\ln x) + x \cdot \cos(\ln x) - 1]$ et $F(x) = \dfrac{1}{2} [x \sin(\ln x) - \cos(\ln x) + 1]$
3. - une primitive sur $]0, \infty[$ de $x \longmapsto \sin(\ln x)$ est donc la fonction $x :\longmapsto \dfrac{1}{2} \cdot (x \cdot \sin(\ln x) - x \cdot \cos(\ln x))$
   - une primitive sur $]0, \infty[$ de $x \longmapsto \cos(\ln x)$ est donc la fonction $x :\longmapsto \dfrac{1}{2} \cdot (x \cdot \sin(\ln x) + x \cdot \cos(\ln x))$

## Exercice 5

1. sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\dfrac{\sin^2 x}{1 + \cos x} = \dfrac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = 1 - \cos x$ (simplification par $1 + \cos x$, non nul sur tout le segment)
   d'où : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} = [x - \sin x]_0^{\frac{\pi}{3}} = [\ldots] = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. si l'on choisit de transformer $K$ en effectuant une intégration par parties,
   en posant $\begin{cases} u(x) = \ln(1 + \cos x) \\ v'(x) = \cos x \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = \frac{-\sin x}{1+\cos x} \\ v(x) = \sin x \end{cases}$,
   on obtient : $K = [\sin x \ln(1 + \cos x)]_0^{\frac{\pi}{3}} + J$, d'où : $K = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

CHAPITRE 12

# Nombres Complexes & Applications

## 12.1 Ecritures algébrique & trigonométrique - rappels & compléments

**Exercice 1**

1. $\dfrac{3-4i}{5+6i} = \dfrac{(3-4i)(5-6i)}{5^2+6^2} = [\ldots] = -\dfrac{9}{61} - i\dfrac{38}{61}$
2. $\dfrac{2+3i}{8-5i} = \dfrac{(2+3i)(8+5i)}{8^2+5^2} = [\ldots] = \dfrac{1}{89} + i\dfrac{34}{89}$

**Exercice 2**

1. $\sqrt{3}+i = 2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$
2. $1-i\sqrt{3} = 2\cdot\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$
3. $1-i = \sqrt{2}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

**Exercice 3**

1. tout d'abord, comme dans l'exercice précédent, on établit : $-1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
   d'où : $(-1+i)^5 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^5 = 4\sqrt{2}e^{i\frac{15\pi}{4}}$ (remarque : on peut remplacer $e^{i\frac{15\pi}{4}}$ par $e^{-i\frac{\pi}{4}}$)
2. • commençons par mettre séparément numérateur et dénominateur sous forme module-argument :
   $-4 = 4e^{i\pi}$ et $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$
   • d'où, par quotient : $\dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$
3. même démarche qu'en 2. :
   • séparément : $2i-2\sqrt{3} = 4\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}\right) = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $4i+4 = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
   • d'où, par quotient : $\dfrac{2i-2\sqrt{3}}{4+4i} = \dfrac{4}{4\sqrt{2}}e^{i\frac{7\pi}{12}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

## 12.2 Pour aller plus loin - la technique de « symétrisation » & applications

**Exercice 1**

1. $e^{i\alpha}+e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\cdot\underbrace{\left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}+e^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}\right)} = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$
2. • 1^er^cas : si $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)>0$ : alors, $e^{i\alpha}+e^{i\beta}$ est de module $2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ et possède $\frac{\alpha+\beta}{2}$ pour argument
   • 2^e^cas : si $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)<0$ : alors, $e^{i\alpha}+e^{i\beta}$ est de module $-2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ et possède $\frac{\alpha+\beta}{2}+\pi$ pour argument

**Exercice 2**

- d'après la question 1. de l'Exercice 1 : $e^{ip}+e^{iq}=2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{i\left(\frac{p+q}{2}\right)}$ $(*)$

$\longrightarrow$ en prenant la partie réelle dans $(*)$, on obtient : $\cos p+\cos q=2\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$

$\longrightarrow$ en prenant la partie imaginaire dans $(*)$, on obtient : $\sin p+\sin q=2\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$

- on peut établir de la même façon : $e^{ip}-e^{iq}=2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{i\left(\frac{p+q}{2}\right)}$ $(*)$

$\longrightarrow$ en prenant la partie réelle dans $(*)$, on obtient : $\cos p-\cos q=-2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$

$\longrightarrow$ en prenant la partie imaginaire dans $(*)$, on obtient : $\sin p-\sin q=2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$

Il suffit alors d'échanger les positions des termes en $\frac{p-q}{2}$ et $\frac{p+q}{2}$ pour obtenir les formules attendues.

**Exercice 3**

1. $S_n+iT_n=1+e^{i\theta}+e^{i2\theta}+\cdots+e^{in\theta}=1+e^{i\theta}+(e^{i\theta})^2+\cdots+(e^{i\theta})^n$
   on reconnaît donc une somme géométrique, de raison $e^{i\theta}$
2. ici, $\theta\equiv 0\,[2\pi]$, donc $e^{i\theta}=1$, et $S_n+iT_n=(n+1)$
   d'où, en prenant les parties réelle et imaginaire : $S_n=n+1$ et $T_n=0$
3. ici, $\theta\not\equiv 0\,[2\pi]$, donc $e^{i\theta}\neq 1$, et : $S_n+iT_n=1\cdot\dfrac{1-(e^{i\theta})^{n+1}}{1-e^{i\theta}}$, d'où le résultat attendu.
4. la technique de l'arc moitié fournit : $1-e^{i(n+1)\theta}=-2i\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\cdot e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}$ et : $1-e^{i\theta}=-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot e^{i\frac{\theta}{2}}$
   d'où, par quotient : $S_n+iT_n=\dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cdot e^{i\frac{n\theta}{2}}$
   et, en prenant les parties réelle et imaginaire : $S_n=\dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cdot\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$ et $T_n=\dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cdot\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$

## 12.3 Application - Résolution d'équations du second degré

**Exercice 1**

1. ici, $\Delta=-4<0$, donc $(E)$ admet deux solutions, complexes conjuguées l'une de l'autre :
   $z_1=\frac{-6+2i}{2}$ et $z_2=\frac{-6-2i}{2}$, soit : $z_1=-3+i$ et $z_2=-3-i$
2. ici, $\Delta=-3<0$, donc $(E)$ admet deux solutions, complexes conjuguées l'une de l'autre : $z_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, soit : $z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, ou : $z_1=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_2=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$
3. ici, $\Delta=4\cos^2\theta-4=-4\sin^2\theta<0$ ($\theta$ étant supposé non multiple de $\pi$, $\sin\theta\neq 0$),
   donc $(E)$ admet deux solutions, complexes conjuguées l'une de l'autre : $z_1=\frac{2\cos\theta+i2\sin\theta}{2}$ et $z_2=\frac{2\cos\theta-i2\sin\theta}{2}$, soit : $z_1=\cos\theta+i\sin\theta$ et $z_2=\cos\theta-i\sin\theta$, ou : $z_1=e^{i\theta}$ et $z_2=e^{-i\theta}$

**Exercice 2**

1. (a) $\omega^5=e^{i2\pi}=1$
   (b) $\frac{2\pi}{5}\in]0,2\pi[$, donc $\omega\neq 1$, d'où : $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=1\cdot\frac{1-\omega^5}{1-\omega}$, avec $\omega^5=1$, d'où le résultat.
2. (a) $z^2=\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2=\omega^2+2+\frac{1}{\omega^2}$
   (b) en divisant par $\omega^2$ l'égalité obtenue en 1.(b), on obtient : $\omega^2+\omega+1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}=0$.
   or : $\omega+\frac{1}{\omega}=z$ et, d'après 2.(a), $\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=z^2-2$, d'où : $z^2+z-1=0$

   (a) $z=\omega+\frac{1}{\omega}=e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{-i\frac{2\pi}{5}}$, donc $z=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$
   (b) 2.(b) fournit $(\Delta=5>0)$ : $z=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ou $z=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, d'où : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ ou $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$
   enfin, $\frac{2\pi}{5}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$, lorsque $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ est négatif, d'où : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

**Exercice 3**

1. (a) $\omega^7 = e^{i2\pi} = 1$

   (b) $u + v = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6$

   or, $\frac{2\pi}{7} \in ]0, 2\pi[$, donc $\omega \neq 1$, d'où : $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = \omega \cdot \dfrac{1-\omega^6}{1-\omega} = \dfrac{\omega - \omega^7}{1-\omega}$,

   enfin, d'après (a), $\omega^7 = 1$, d'où $u + v = -1$

2. (a) utilisons ici une généralisation de l'identité remarquable bien connue :

   $$(a+b+c)^2 = \underbrace{a^2+b^2+c^2}_{\text{carres}} + \underbrace{2ab+2ac+2bc}_{\text{doubles produits}}$$

   on obtient : $u^2 = \underbrace{\omega^2+\omega^4+\omega^8} + \underbrace{2\omega^3+2\omega^5+2\omega^7}$

   or, $\omega^7 = 1$, donc $\omega^8 = \omega$, d'où : $u^2 = u + 2v$

   (b) 1.(b) fournit alors : $u^2 = u + 2\cdot(-1-u)$, d'où $u^2 + u + 2 = 0$

3. (a) $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \mathrm{Im}(u)$

   (b) remarquons : $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)$

   donc : $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \underbrace{\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)} + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)$

   or :

   · d'une part, $\frac{4\pi}{7} \in ]0, \pi[$, donc $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) > 0$

   · d'autre part, $0 < \frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$, donc, sin étant str. croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) > 0$

   d'où, par somme, $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) > 0$

   (c) d'après 2.(b) ($\Delta = -7 < 0$), $u = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ ou $u = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$, donc : $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$.

   d'où, d'après 3.(b) : $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = +\frac{\sqrt{7}}{2}$

# Troisième partie

## Un problème d'Analyse

# Problème - La série harmonique & la série harmonique alternée

## Partie 1 - Nature de la série harmonique & Existence de la constante $\gamma$ d'Euler

*Définition-Notation :* *on appelle série harmonique la suite* $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de terme général :*

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \left(= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

1. *Une inégalité préliminaire.*

   (a) Montrer, pour tout $u \in ]-1,+\infty[$ : $\quad \ln(1+u) \leqslant u$.

   (b) Illustrer et interpréter graphiquement.

   *Cette inégalité deviendra une inégalité de référence cette année.*

2. *Nature de* $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (a) Etudier la monotonie de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (b) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

   (c) En déduire qu'il est impossible que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Qu'en déduit-on ?

3. *Encadrement de* $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (a) Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$

   (b) En déduire, pour tout $k \in [\![2,+\infty[\![$ : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$

   (c) Etablir alors, pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$ : $1 + \ln(n+1) - \ln 2 \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n \quad (*)$

4. *Equivalent de* $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (a) Montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$.

   (b) En déduire, en utilisant $(*)$ : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$.

   *Ce résultat se réécrira cette année :* $H_n \sim \ln n$ *(lire : «* $H_n$ *est équivalent à* $\ln n$ *lorsque* $n \longrightarrow +\infty$ *»).*
   *Il signifie que* $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *diverge vers* $+\infty$ *à la même vitesse que la suite, plus simple, de terme général* $\ln n$*.*

5. *Approfondissement.*

   *(a) Montrer que la suite* $(H_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est décroissante. On pourra utiliser 1.*

   *(b) En déduire, en utilisant* $(*)$*, qu'elle converge vers une limite finie.*

*Définition & Culture :* *la limite de cette suite est appelée Constante Gamma d'Euler et notée* $\gamma$*.*
*Il faut savoir que* $\gamma \approx 0.58$*.*

## Partie 2 - Convergence et somme de la série harmonique alternée

*Définition-Notation : on appelle ici Série Harmonique Alternée la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général :*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left( = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right)$$

1. *Un résultat préliminaire.*

   > *Définition : on dit que deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes si :*
   > (1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est croissante,* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est décroissante*
   > (2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

   Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites adjacentes.

   (a) Etudier la monotonie de la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (resp. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$) est majorée (resp. minorée).

   (c) Etablir alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers une même limite finie.

   *Ce résultat sera revu et approfondi cette année dans le chapitre consacré aux Suites Numériques.*

2. *Nature de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*
   Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
   *D'après 1., $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent donc vers une même limite finie, que l'on note $\ell$ pour la suite.*

   *On admet que par « rassemblement » des termes, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers $\ell$.*

3. *Limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

   (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} = H_{2n} - H_n$.

   (b) En déduire la valeur de $\ell$ en utilisant la Partie 1.
   *On pourra notamment introduire la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par $H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$, et exploiter la propriété : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, résultant de la définition de $\gamma$*

*Bilan :* *on a donc démontré :* $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \quad \dots \quad =$ (compléter)

# Indications

## Partie 1

1.(a) étudier la fonction $u \longmapsto \ln(1+u) - u$ (définie par la différence)
2.(a) former la différence $H_{n+1} - H_n$ ; elle est égale à $\frac{1}{n+1}$
2.(b) deux méthodes sont possibles :
· une récurrence, mais il y a plus rapide et plus élégant :
· à $n \in \mathbb{N}^*$ fixé :
$H_{2n} - H_n = \underbrace{\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}}_{n \text{termes}}$, où tous les termes sont supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2}$...
2.(c) si $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeait vers une limite finie $L$, il en serait de même pour $(H_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ ;
la suite $(H_{2n} - H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergerait alors vers $0$, ce qui est impossible d'après 2.(b)
étant croissante et non convergente, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge donc vers $+\infty$
3.(a) intégrer terme à terme la chaîne d'inégalités : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$, valable sur le segment $[k, k+1]$
3.(c) commencer par sommer membre à membre les inégalités obtenues en 3.(b) pour $k = 2, \ldots, k = n$ ;
utiliser également la relation de Chasles ; par ailleurs, les intégrales sont calculables
4.(a) ce résultat est proposé en exercice dans le chapitre sur les Limites, et corrigé dans la deuxième partie.
4.(b) diviser $(*)$ par $\ln n$ et procéder par encadrement.
5.(a) former la différence $(H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln n)$
elle est égale à : $\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$, ou encore : $\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$...
5.(b) une partie de $(*)$ permet d'établir que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée.

## Partie 2

1.(a) $v_n - u_n = v_n + (-u_n)$ ; ceci permet de montrer que $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante
1.(b) $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeant vers $0$ en décroissant, elle est à valeurs positives ;
ceci permet de montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $u_n \leqslant v_n$
la chaîne d'inégalités ci-contre, obtenue en tenant également compte des hypothèses de monotonie :
$u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$, fournit alors : $u_n \leqslant v_0$ et : $v_n \geqslant u_0$
1.(c) en notant $\ell_u$, $\ell_v$ les limites respectives de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, par différence, $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell_v - \ell_u$ ; l'unicité de la limite fournit alors $\ell_v - \ell_u = 0$, d'où $\ell_u = \ell_v$
2. en étant attentif aux questions d'indices, on établit :
· $S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} \geqslant 0$
· $S_{2(n+1)} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} \leqslant 0$
· $S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} \longrightarrow 0$
3.(b) en suivant l'indication fournie par l'énoncé, on obtient : $H_{2n} - H_n = (\ln(2n) + \gamma + \varepsilon_{2n}) - (\ln n + \gamma + \varepsilon_n)$,
soit $H_{2n} - H_n = \ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n$ ; or, lorsque $n \longrightarrow +\infty$, $\varepsilon_n \longrightarrow 0$, donc $\varepsilon_{2n} \longrightarrow 0$, d'où $H_{2n} - H_n \longrightarrow \ln 2$.
ainsi, par unicité de la limite de $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\ell = \ln 2$.

*Bilan : on a donc établi dans ce Problème :* $\quad 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \ \ldots \ = \ \ln 2$